



URS

DE

Mineralogie

PARTEA I^a

CRISTALOGRAFIA GEOMETRICĂ

PREDAT LA FACULTATEA DE ȘTIINȚE DIN IAȘI
de

Profesor V. C. BUTUREANU

Anul 1921-22.



Curs de Mineralogie.

Introducere.

Toate corpurile, care există la suprafața pământului, se împart în trei clase mari: Animale, Vegetale și Minerale. Corpurile ce formează cele două d'întâi clase, se deosebesc de cele din a treia prin un caracter decisiv: viața. Pe când animalele și vegetalele se nasc, trăiesc și apoi mor, mineralele nu au viață. Dacă vom să facem să intervină și alte caractere distinctive mai intime, vom pute considera conformația: pe când animalele și vegetalele posedă diverse organe, care au de îndeplinit un rol anumit pentru a întreține viața individului, mineralele sunt lipsite de aceste organe, fiind că nu au nevoie de ele. Dar caracterul distinctiv cel mai important este fără îndoială constituția internă: pe când animalele și vegetalele sunt compuse din un număr mai mare sau mai mic de molecule, seorbite,

care în timpul vieții se disting și se reînnoiesc continuu, mineralele considerate în stare omogenă, sunt compuse în toată întinderea lor din aceleași molecule, care nu se schimbă atât vreme cât nu este o cauză exterioară care să influențeze asupra naturii Sale. - -

Vom înțelege dar sub numele de minerale corpuri simple sau compuse care, având o compoziție chimică determinată, intră în constituția pământului. - -

Mineralele sunt răspândite în mod foarte arbitrar la suprafața pământului, și omul s'a servit de ele de la începutul existenței Sale: este dar necesar să le studiam. Știința care se ocupă cu studiul mineralelor, se numește Mineralogie. - -

Să vedem acum în ce va consta acest studiu. Se știe că, pentru a recunoaște un corp, trebuie să știm a-l deosebi de toate cele l. alte corpuri cu care este asociat. Putem ajunge la acest rezultat, mai întâi prin cunoașterea caracterelor fizice, dacă ele sunt destul de caracteristice și bine pronunțate; dacă însă aceste caractere sunt comune mai multor corpuri, atunci ele nu mai sunt suficiente și trebuie să facem recurs la alte mijloace, și în primul să ne adresăm compoziției

chimice a corpului, determinând elementele care intră în constituția sa, și cum ele sunt combinate, ceea ce constituie caracterele chimice a corpului. —

Printre caracterele fizice, cel întâi care ne impresionează este acel datorit formei corpului. Câte odată găsim corpuri fără formă regulată și aceste se numesc Corpuri amorse. După cum vom vedea mai în urmă, în corpurile amorse moleculele sunt distribuite în toate direcțiunile în mod arbitrar: aceste corpuri sunt lipsite de o arhitectură moleculară, ceea ce arată că, masa în locul careia acest corp s'a consolidat, nu era în condiții de liniște necesare unei dispoziții regulate a moleculelor sale. Când însă un corp ia starea solidă în condiții așa că, moleculele sale nu se supun decât puterilor de atracțiune reciprocă, care există în mod natural între ele, aceste molecule se dispun regulat după linii drepte, iar la exterior corpul e terminat în fețe plane, care i dau forma unui poliedru geometric oare - care. În acest caz corpul se numește Cristalizat; indivizii cristalizați se numesc cristali, iar partea Mineralogiei, care se ocupă cu studiul cristalelor se numește Cristalografie.

Fînd cã numãrul minerelelor este foarte mare, pentru a le putea studia, trebuie sã le reunim în grupe cu caractere comune. La acest rezultat ajungem prin o clasificare.

Prin urmare: pentru a putea face studiul complet al minerelelor, va trebui sã împãrtim Mineralogia în patru pãrți:

În prima parte ne vom ocupa cu studiul formelor geometrice sub care se prezintă mineralele, cãia ce formează obiectul Cristalografiei Geometrice. --

A doua parte va cuprinde studiul tuturor celorlalte proprietãți datorite caracterelor fizice a cristalelor, precum: duritate, densitate etc. și mai ales proprietãțile optice, asupra cãrorã vom insista mai mult.

La formația: Cristalografia Fizică. --

În partea a treia vom studia caracterele chimice ale minerelelor și ne vom ocupa de compoziția lor, precum și de diversele metode prin care putem determina natura compoziției, fie în mod analitic sau sintetic, fie pe cale umedã sau pe cale uscatã.

În fine: a patra parte va constitui Mineralogia descriptivã, având ca obiect clasificarea și studiul speciilor minerale. --

Ultima parte a Studiului Mineralogiei va fi formată de aplicarea cunoștințelor asupra proprietăților speciilor minerale, și mai ales a proprietăților optice, la determinarea Rocilor eruptive, ceea ce constituie obiectul Petrografiei. — —

Înainte de a merge mai departe, să vedem ce loc ocupă Mineralogia printre Științe.

Dacă examinăm în ordine istorică, mersul descoperirilor în domeniul Mineralogiei, vom constata că: timpurile vechi, erul mediu și chiar timpurile moderne, nu ne prezintă decât o aglomerație de cunoștințe, fără nici o legătură între ele. Causa este că, în aceste timpuri, toate cunoștințele mineralogice erau rezultatul numai a observațiilor; din această cauză Mineralogia era o știință de observație și constituia numai o ramură mai mult sau mai puțin importantă a Geologiei și prin urmare clasată printre Științele naturale. Actualmente Mineralogia face parte din grupa Științelor Fizice, ca una ce a devenit o știință experimentală. —

Raportându-ne la caracterele pe care le-am considerat necesare pentru Studiul mineralilor

vedem ușor că, Mineralogia înfrumusețată mijloacele sale de investigare de la cele două științe eminemente Experimentale, Fizica și Chimia, și în special Cristalografia poate fi considerată ca o Știință Matematică. Dacă pe lângă partea experimentală luăm în considerare partea datorită fortamente observațiunii, aceasta nu ia într-o minime Mineralogiei caracterul de Știință Fizică.

Nu există Știința care să prezinte o mai mare varietate în domeniul ei de cât Mineralogia. - În adevăr pentru acei ce vor să se ocupe în mod special cu speculațiunile transcendente ale Filosofiei, ea oferă un vast câmp de studiu în părțile sale relative la explicarea Cristallizațiunii, a fenomenelor de izomorfism și polymorfism; pentru acei ce caută perfecțiunea matematică, ea oferă Calculul cristalografic, teoriile matematice asupra fenomenelor optice etc. Fizicianul și Chimistul găsește un material pe cât de important pe atât și de variat pentru studiile lor experimentale în proprietățile fizice și chimice ale mineralilor; în fine naturalistul găsește în Mineralogia

descriptivă material pentru a se cunoaște
calitățile sale de observator, prin studiul
proprietăților exterioare a mineralelor. —
Gratie acestui non aspect sub care se pre-
zintă știința mineralogică, ea a devenit
astă-ză una din științele cele mai instruc-
tive și mai atractive. — — —

Partea I^a

Cristalografia Geometrică

Cap. I.

Generalități.

Considerând un cristal, constatăm că de-
terminat cu planuri care formează Fetele cris-
talului; apoi că, aceste fete se fac două câte
două pentru a forma muchile, care corespund
unghiurilor diedre formate de fete; în fine că,
tân sau mai multe fete pot să aibă un punct
comun, unde se întâlnesc diedrele fetelor con-
siderate 2 câte două, pentru a forma unghiuri
poliedre care se numesc: unghiurile Solide
a cristalului. Deci: fetele, muchile și unghi-
urile solide sunt elementele ce trebuie să considerăm

în fiecare cristal. — —

Între numărul acestor demante la fiecare cristal există totdeauna o relațiune care permite a determina numărul unuia din ele când cunoaștem pe a celor - l. - alte două.

Insemnând cu F numărul fetelor, cu M numărul muchilor și cu V pe al unghiurilor solide, avem în tot-de-a-una relațiunea:

$$F + V = M + 2.$$

de unde deducem relațiunile:

$$F = (M + 2) - V, \quad V = (M + 2) - F, \quad \text{și} \quad M = (F + V) - 2.$$

Așa la cub avem: $6 + 8 = 12 + 2.$

La dodecaedrul romboidal: $12 + 14 = 24 + 2.$

La piramida hexagonală: $12 + 8 = 18 + 2.$

— Dacă considerăm o substanță cristallizată, constatăm că, forma fetelor se poate schimba în diversele forme compuse pe care mineralul le poate prezenta; deci: forma fetelor nu e suficientă pentru a de-

termina forma cristalină. Dar dacă determinăm valoarea unghiului diedru pe care - l. formează două fete determinate

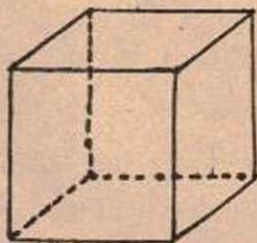


Fig. 1.

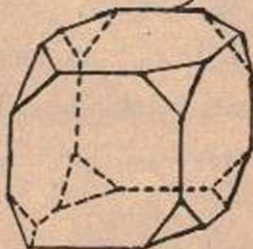


Fig. 2.

constatăm că acest unghi și conservă valoarea

ori care ar fi forma fetelor. Aşa, dacă considerăm un cub (Fig 1) vedem că feţele au forma de pătrate, iar unghiurile diedre au 90° . Dacă înlocuim unghiurile solide prin feţele Octaedrului (Fig. 2) forma fetelor cubului devine octogonală, fără ca valoarea diedrului de 90° să se schimbe. De ase-

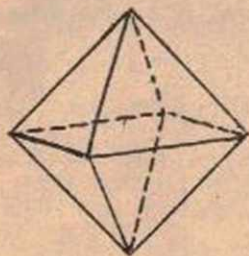


Fig. 3.

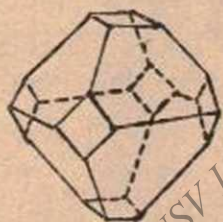


Fig. 4.

meniu, dacă considerăm un Octaedru, forma fetelor e a unor triunghiuri ecvilaterale, formând între ele unghiuri de $109^\circ 30'$ (Fig 3). Dacă

intervenim modificăţile pe unghiuri prin feţele cubului, forma fetelor octaedrului devine hexagonală, pe când unghiul fetelor rămâne acelaşi: $109^\circ 30'$ (Fig 4). Deci: Constanta unghiurilor pe care le fac feţele între ele este caracterul cel mai important, care poate servi la determinarea formulelor cristaline. Va trebui dar să vedem care sunt metodele şi instrumentele ce servesc la măsurarea unghiurilor diedre a cristalilor. —

Aparatele ce servesc la măsurarea unghiurilor diedre a cristalilor se numesc Goniometre

Numărul formelor cristaline ce prezintă mine-
ralele este așa de mare în cât Studiul lor ar
fi cu neputință de făcut, dacă nu am avea un
mijloc de a le reuni în clase cu caractere
comune. De aceea știința cristalografică
nu a putut lua naștere de cât după des-
coperirea clivajului de către abatele fran-
cez Haüy, care, în studiile sale asupra car-
bonatului de Calciu a ajuns la ideea de Sistem
cristalin. Haüy admite că, toate formele cris-
taline se pot deduce d'înt'r'un număr foarte
restrâns de forme principale, pe care le numi-
m forme primitive, iar celor deduse din ele le
dădu numele de forme derivate sau secundare,
iar sub numele de Sistem Cristalin d'înte-
legea reunirea tuturor formelor care se pot
deduce din o formă primitivă. — — —

În urma lui Haüy, diversi cristalografi
mai ales Germani și Englezi, precum: Weiss,
Rose, Whewell, Miller etc. au imaginat alte
metode pentru a explica formarea diverse-
lor forme cristaline și au insistat asupra
altor caractere pentru definirea sistemelor
cristaline, căutând să dea Cristalografiei
un caracter mai mult geometric. Din a-
ceastă cauză se cunoaște astăzi mai multe

Sisteme cristalografice, întrebuințate de preferință în anumite țări. Așa, în Franța se întrebuințează sistemul cristalografic al lui Hauy perfecționat de Levy și Desclorjeaux, și sistemul lui Bravais perfecționat de Mallard.

În Germania se întrebuințează sistemul lui Weiss modificat și perfecționat de Ramondberg și Naumann. În fine în Anglia se întrebuințează numai sistemul cristalografic al lui Whewell, perfecționat de Miller.

De oare ce este admis asta? Fi ca, în orice lucrare cristalografică, notațiunile să fie cuprinse simultan în cele trei sisteme:

Levy, Naumann și Miller, ne propunem a studia mai întâi principale pe care se bazează fiecare din aceste sisteme cristalografice, ca astfel să putem studia sistemele cristaline în paralel după Levy, Naumann și Miller. — — —

Cap. II.

Principiile sistemelor cristalografice.

I.

Sistemele cristalografice franceze.

După cum am spus deja, sunt doua sisteme

cristalografice franceze: Sistemul lui Levy și Sistemul lui Bravais.

Sistemul lui Levy.

Romé de L'Isle este cel întâi care a încercat să grupeze cristali în 6 clase, după forma fețelor și valoarea unghiurilor ce fac aceste fețe între ele. Dar Hüy a fost acela care, pentru prima oară a prezentat lucrurile sub o formă bine definită, servindu-se de proprietatea clivajului, pe care el o descoperise. El admite că, dacă găsim într'un mineral, trei planuri de clivaj deosebite, aceste planuri determină un solid prismatic, cu o formă bine definită constantă, căruia îi dădu numele de formă primitivă. El observă pentru prima dată această proprietate pe un cristal de Carbonat de Calciu (Fig 5)

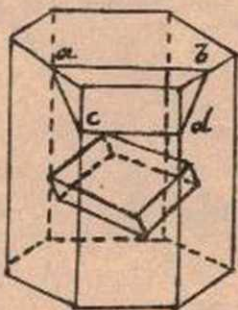


Fig 5.

care prezenta o față abcd în locul unei muchii bazice. Încercând să obțină prin Clivaj, fețe analoage pe cele 8 alte muchii, el constată că: trei muchii alterne de la baza superioară și trei de la baza inferioară, alterne cu

cele de sus, sunt susceptibile de a fi înlocuite prin câte o fată. Continuând clivajul către centrul cristalului, el obține un alt solid ce avea forma unui romboedru, care se găsea ca un Simbur în mijlocul cristalului hexagonal de Calcită. - Această descoperire a condus pe Haüy mai întâi la teoria desclivajelor și apoi la teoria truncheturilor, care i-a permis a explica obținerea formelor secundare, înlocuind unghiurile solide sau muchiile formelor primitive, prin fețe. - - -

În același timp Haüy, constată că, această înlocuire nu se putea face în orice mod, dar numai după o lege pe care el o enunță pentru prima oară sub numele de: Legea de Simetrie. Această lege se enunță așa:

Când o modificare are loc pe un element al unui cristal, toate elementele simetrice a cristalului trebuie modificate în același mod. -

Pentru a înțelege mai bine aplicarea acestei legi, să amintim în câte. va cuvinte principalele relative la Simetrie. -

Se știe din Geometrie că: două puncte A și A' sunt simetrice în raport cu un plan P , când ele sunt situate pe aceeași perpen-

diculară la plan și la egală distanță: $AO = OA'$. -
de o parte și de alta a planului. - Când în-

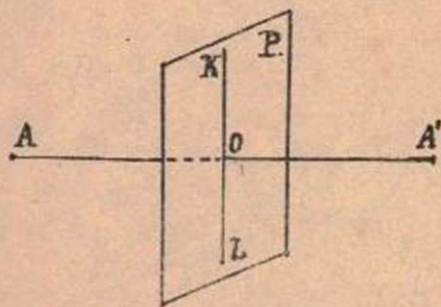


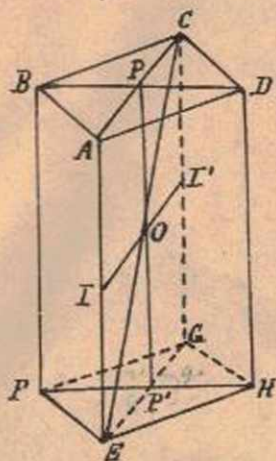
Fig. 6. -

tr'un cristal toate punctele sunt simetrice două câte două, în raport cu un plan conținut în acest cristal, acest plan se numește plan de simetrie. De asemenea se numește axă de simetrie o dreap-

tă KL , în raport cu care toate punctele cristalului sunt simetrice două câte două. -

Valoarea simetriei unei axe poate varia. Așa: se face că o axă are simetria n când trebuie să întoarcem cristalul de un unghi de $\frac{360^\circ}{n}$ în jurul acestei axe, pentru ca să se prezinte cu același aspect. Așa: pentru o rotație de: $\frac{360^\circ}{2}$ sau $\frac{360^\circ}{3}$, $\frac{360^\circ}{4}$, $\frac{360^\circ}{6}$, avem axe de simetrie: binară, ternară, cuaternară și senară. În fine se face că, două puncte sunt simetrice în raport cu al treilea punct O , numit centru de simetrie, când acest din urmă punct împarte în două părți egale, dreapta AA' care unește cele două puncte. — — —

Ca exemplu să luăm o priză dreaptă cu baza de romb, în care considerăm



planul care trece prin muchile BF și DH . - Fiecum că acest plan este un plan de simetrie. În adevăr: punctele A și C , I și I' , E și G , sunt simetrice în raport cu acest plan, căci avem: $CP = PA$, $IO = OI'$, $EP = P'G$. Același lucru pentru planul care trece prin AE și CG . (Fig. 7). Aceste

două planuri se întâlnesc după dreapta PP' , care unește centrele celor două baze. Această dreaptă este o axă de simetrie și simetria sa e binară. În fine, dacă unim punctele C și E prin o dreaptă, ea întâlnește dreapta PP' în punctul O , care este un centru de simetrie, căci: $CO = OE$. În adevăr: triunghiurile CPO și EOP' dreptunghice în P și P' , au unghiurile: $POC = EOP'$ ca opuse, și $PCO = OEP'$ ca alterne interne; apoi $EP' = PC$ ca jumătăți de diagonale; triunghiurile fiind egale, vor avea: $CO = OE$.

Definiția centrului de simetrie ne duce la o consecință importantă. Dacă un poliedru are un centru de simetrie, o dreaptă care trece

prin acel centru, trebuie să întâlnească suprafața poliedrului la distanțe egale de acest centru, deci va trebui să aibă fețele sale paralele două câte două; în reciproc: un poliedru care are fețele paralele două câte două, trebuie să aibă un centru de simetrie.

În general putem zice că: prezența unui număr oarecare de elemente de simetrie determină existența altor elemente de simetrie. Geometria care a studiat aceste relațiuni, ne dă un mare număr, din care vom cita următoarele două:

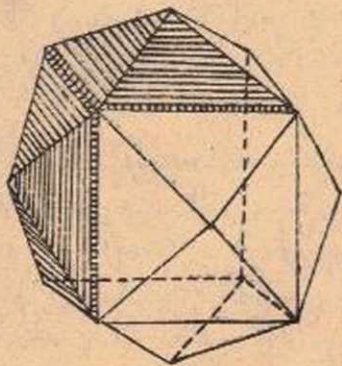
1^o Când un cristal are un centru și o axă de simetrie binară, trebuie să aibă și un plan de simetrie. -

2^o Când un cristal are două axe de simetrie binară, trebuie să aibă și pe a treia. etc. -

— S'a făcut mai înainte că, Haüy descoperise clivajul, și vedea această operațiune începută, el o presupune condusă până la ultima extremitate, obținând astfel cea mai mică particulă care păstrează forma solidului primitiv. Acestea ultime particule Haüy i dă numele de Moleculă integrantă. De aici el deduce teoria că: toate corpurile cristalizate sunt formate prin juxtapunere de molecule integran-

te, după linii și planuri paralele, iar pentru a explica deducerea formelor secundare din formele primitive, emite teoria descreșterilor.

Nu vom urmări pe Haüy în dezvoltările necesare pentru susținerea acestei teorii, dar vom lua numai un exemplu: formarea dodecaedrilor rhomboidal din cub. -



Să ne închipuim că pe o față a cubului se aplică o serie de lamele, având fiecare grosimea unei molecule integrante și mai mică pe marginea sa cu o serie de molecule, așa că fața cubului și fiecare lamelă sa prăpăsită rămân descoperită pe marginea sa

cu un rând de molecule. Dacă continuăm această operațiune până ce ultima lamă aplicată se reduce la o moleculă, vom avea pe fața cubului aplicată o piramidă cu bază de pătrat, iar fețele niște triunghiuri egale. Dacă facem această operație pe cele șase fețe a cubului, constatăm că: noua fețe triunghiulare adiacente aceluiași muchiu a cubului, se află pe același plan

asa ca, unirea lor da nastere unei singure fete
rombice; - deci: cele 24 fete triunghiulare se vor
combina doua cate doua si vor da 12 fete rom-
bice, care vor constitui dodecaedrul romboidal.
Pentru a aduce aminte suprapunerea lamelor
desorescătoare, Haiy numeste aceasta operatie
descrestare pe muchi. Pentru a explica forma-
rea Octaedrului din cub, Haiy scoate mole-
cule integrante de re unghiurile cubului, ceea
ce face ca, unghiurile sunt inlocuite prin
fete. Acesta este un exemplu de descrestare
pe unghiuri.

Este usor de văzut ca, variind numărul
moleculilor integrante ce se iau fie pe muchile
fie pe unghiurile cubului, vom pute ajunge a
explica deducerea tuturor formelor secundare
ale sistemului cubic. Si dacă, în loc de a ple-
ca de la forma cubică, plecăm de la forme-
le primitive ale celor 6 alte sisteme cristaline
vom pute obtine toate formele derivate ce
exista. —

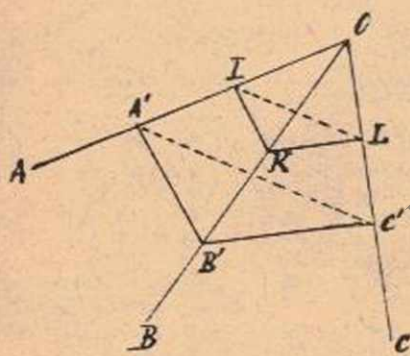
Tot lui Haiy se datoreste o alta lege impor-
tanta: Legea Derivatiei pe care el o exprima
astfel:

Lungimile interceptate de o fata pe muchile
formei primitive, divizate prin diviziunile
formei primitive, ce corespund acestor muchi,

au între ele raporturi rationale.

Acastă lege este astăzi exprimată sub o formă mai clară, fiind că teoria descrescărilor a lui Haüy a fost înlocuită prin teoria truncheturilor, în care întorcim direct muchile sau unghiurile formelor primitive prin fete, care înlocuie urmează mai întâi legea de simetrie și apoi legea de derivație, exprimată astfel:

Când două fete modifică un unghi al unui cristal, ele interceptează pe muchi lungimi ce sunt între ele într'un raport simplu.



Fie fața $A'B'C'$ care modifică unghiul O , luând pe muchile OA, OB, OC distanțele: $OA' = a, OB' = b, OC' = c$. Dacă unghiul O e modificat de o a doua față IKL , este evident că, distanțele OI, OK, OL vor fi fracțiuni

din OA', OB', OC' și vom putea scrie:

$$OI = \frac{a}{q}, \quad OK = \frac{b}{r}, \quad OL = \frac{c}{s} \quad \text{de unde:}$$

$$q = \frac{a}{OI}, \quad r = \frac{b}{OK}, \quad s = \frac{c}{OL}$$

cantitățile q, r, s fiind numere rationale simple.

— În urma lui Haüy, unul din elevii,

Delafosse, pentru a completa ideile profesorului Sen, caută să explice modul de derivare a formelor numite Hemiedrice, care nu se puteau obține urmând legea de Simetrie.

El a demonstrat că, pentru a trece de la o formă primitivă la o formă derivată, trebuie ca, moleculele din care presupunem că sunt compuse cristalin, să fie asemenea atât din punct de vedere geometric cât și din punct de vedere fizic; dar că, în unele cazuri, forma geometrică a moleculei integrante poate să nu fie aceeași ca a cristalului care o conține. Așa: în sistemul cubic, molecula integrantă poate să aibă altă formă de cât cea a cubului; ea poate fi de ex: tetraedrică și atunci, dacă una din fețele cubului poate fi considerată prin jumătarea fețelor triunghiulare a moleculelor integrante tetraedrice, fata paralelă cu aceasta, va fi formată din varfurile opuse fețelor tetraedrelor elementare.

O parte a formelor hemiedrice fiind caracterizată prin lipsa de fețe paralele, nu intră în legea de Simetrie, care are fețe paralele două câte două. Astăzi se aplică formarea acestor forme hemiedrice cu fețe

inclinate admitând că, numai jumătate din elementele Simetrice, și anume cele alterne, se modifică. — —

— Tata acumă în rezumat principiile pe care se bazează sistemul cristalografiei franceze, așa cum a exprimat-o Levy, și cu perfecționările aduse de către Des-Cloizeaux. — —

Mai întâi se consideră toate formele cristaline, deduse prin truncheturi, din 7 forme primitive, care sunt: Cubul, Prizma patratică, Prizma ortorombică, Prizma hexagonală, Rombodrul, Prizma clinorombică și Prizma asimetrică.

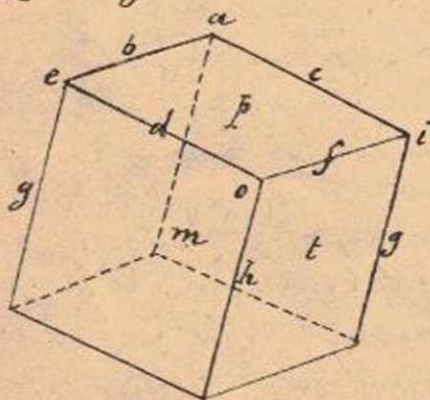
După teoria truncheturilor pentru a explica deducerea formelor secundare din formele primitive, se consideră cele trei muchii ce formează un unghi Solid și atunci putem face că: Sistemul cubic e caracterizat prin forma primitivă: Cubul, care are trei muchii dreptunghiulare egale; Sistemul patratic prin prizma patratică, care are trei muchii dreptunghiulare, din care: două orizontale egale, și a treia verticală dublă etc. —

Însă în Cristalografie ca și în Chimie avem nevoie de un sistem de notatime pentru

a prescurta numirea si reprezentarea formelor. Acest Sistem de notatiune imaginat mai întâi de Haüy a fost perfectiunat mai în urmă de către Levy si apoi de Des Cloizeaux. —

Pentru notarea fetelor se întrebuintază cotele consoane de la începutul celor trei silabe a cuvântului Permitiv, adică: p, m, si t. Pentru notarea muchilor se întrebuintază: pentru cele baze consoanele: b, c, d, f, iar pentru muchile laterale g si h; în fine pentru unghiurile solide vocalele: a, e, i si o. —

Ca exemplu general să luăm prizma asimetrică, fie care o așezăm așa ca, baza să fie înclinată de la stânga la dreapta si de îndărăpt înainte, iar diedrul lateral obțuz să fie înainte. Fetele fiind două câte două egale si paralele, se va întrebuinta litera p pentru a nota bazele, m pentru fața laterală de la stânga si opusa sa, iar t pentru cele rămase. Pentru notarea unghiurilor, începem

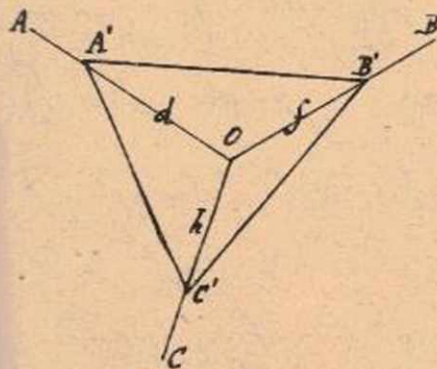


de sus în jos si de la stânga la dreapta: a pentru unghiul superior, e la stânga,

i la dreapta si o pentru unghiul anterior.
Pentru muchii avem: b si d pentru muchile
bazice la stanga, c si f la dreapta; g pen-
tru muchile laterale ascutite si h pentru
cele obtuze. — —

Dacă trecem la sisteme mai simetrice
numărul literilor întrebuințate pentru no-
tațiune devine mai mic, așa că, ajungând
la sistemul cubic, nu avem nevoie de cât
de trei litere: p pentru fete, a pentru un-
ghiuri si b pentru muchii. —

Pentru a vedea cum se stabilește notatiu-
nea unei fete, care modifică unul din ele-
mentele unui cristal, să luăm ca exemplu
cazul cel mai general. Să considerăm



unghiul solid O , al unei
hrizme asimetrice, for-
mat de muchile OA ,
 OB si OC , a căror lungi-
me întreagă e însem-
nată $OA = d$, $OB = f$, $OC = h$.
O fată oarecare: $A'B'C'$
interceptează pe muchii
distanțele OA' , OB' , OC' , care

sunt fracțiuni din muchile întregi. Vom pute
deci scrie: $OA' = \frac{1}{x} d$, $OB' = \frac{1}{y} f$, $OC' = \frac{1}{z} h$.

Avem astfel trei parametri care determină
fața ce va fi notată: $d^{\frac{1}{2}} f^{\frac{1}{3}} h^{\frac{1}{2}}$.

Acasta este notația cea mai generată.

Să examinăm acum cazurile particulare
ce se pot prezenta. —

Dacă două din cantitățile x, y, z sunt $= 0$,
avem notațiunea: $d^{\frac{1}{2}} f^{\frac{1}{3}} h^{\frac{1}{2}}$. Si fiind că:

$\frac{1}{2} = x$, notațiunea precedentă înseamnă că
fața atinge muchiile d și f la infinit, deci
e paralelă cu fața p , de care e distanță
de cantitatea $\frac{1}{2}$. —

Dacă numai una din cantitățile x, y, z este
zero, fața va fi notată: $d^{\frac{1}{2}} f^{\frac{1}{3}} h^{\frac{1}{2}}$; ea va fi para-
lă cu muchia d , pentru că o atinge la $\frac{1}{2} = x$.
Pentru a prescurta notațiunea acestor fațe, se scrie
litera ce notează muchia, dându-i-se ca exponent
coefficientul între distanțele luate pe cele l-alte două
muchii: $d^{\frac{1}{2}} f^{\frac{1}{3}} h^{\frac{1}{2}} = d^{\frac{1}{2}}$.

Când avem: $y = z$, notațiunea devine: $d^{\frac{1}{2}}$. —

Pentru o față paralelă cu h , vom avea nota-
țiunea generată: $d^{\frac{1}{2}} f^{\frac{1}{3}} h^{\frac{1}{2}} = h^{\frac{1}{2}}$.

Fiind că o asemenea față, după valorile re-
lative a lui x și y , se poate inclina la stânga
sau la dreapta, pentru a le deosebi scriem:
 $\frac{x}{h}$ sau $\frac{y}{h}$.

Dacă în notațiunea generată avem: $x = y$, ea

derine: $d^{\frac{1}{2}} f^{\frac{1}{2}} h^{\frac{1}{2}}$, iar notațiunea fetei se
prescurtează și derine: $O^{\frac{1}{2}} h^{\frac{1}{2}}$ sau: $O^{\frac{1}{2}}$. —

Când $x = x$, atunci avem: O^1 . —

Sistemul lui Bravais. —

Sistemul cristalografic al lui Bravais este
bazat pe considerațiuni cu totul deosebite
de acele ale lui Haüy și a succesorilor lui.
El pleacă mai întâi de la ideea că: toate
corpurile fiind compuse din molecule, se roa-
te întâmpla ca, aceste molecule să fie orien-
tate într-un mod oarecare și în acest caz
corpul este amorf, sau că moleculele sunt
orientate după direcțiuni bine definite, și atunci
corpul e Cristalizat. — Se constată în adevăr
că, în corpurile cristalizate, diversele propri-
etăți fizice precum: viteza de propagare a
luminii, coeziunea, duritatea etc. sunt a-
celeași pe direcțiuni paralele. — —

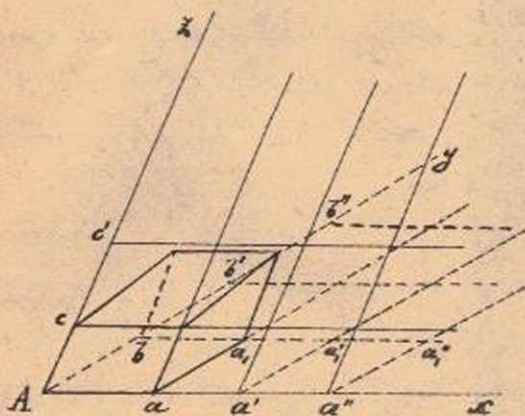
Ideile lui Bravais, expuse în mai multe
publicațiuni, au fost adunate și publicate sub
titlul: Etudes cristallographiques de către
Elie de Beaumont. Ideile și teoriile lui Bra-
vais au fost puse sub o formă mai ușoară de
înțeles, de către Mallard. Tata în rezumat
expunerea lui:

expunerea lui:

Ideile lui Haüy asupra constitutiei corpurilor cristalizate asa cum el le expusese, nu erau nici complete nici generale. Pentru a le completa, Bravais a imaginat ideia simpla a homogenitatii. Un corp solid este considerat ca homogen, când prezinta in toate partile sale aceleasi caractere precum: duritate, densitate, clivaj etc. El trebuie sa fie compus din particule dispuse uniform in toate sensurile, asa in cat, daca o dreapta oarecare strabate acest corp, pe o lungime ℓ , ea trebuie sa intalneasca un numar n de aceste particule, asa ca distanta $\frac{\ell}{n}$ intre aceste particule sa ramana constanta, ori care ar fi directia in care linia strabate corpul. - Insa in corpurile cristalizate, homogenitatea nu poate fi considerata in acest mod in toate directiunile si va trebui sa examinam in ce mod ea variaza in diversele cazuri, ce se pot prezenta. -

Vom admite dar ca, fiecare corp solid homogen este compus din un numar mare de puncte foarte apropiate, care reprezinta centrii de greutate ale moleculelor ce constituie corpul; apoi ca aceste puncte sunt distribuite astfel in cat daca reunim doua d'entre ele prin o dreapta si daca o prelungim la dreapta si la stanga, ea

trebuie să întâlnească alte puncte la distanțe egale: aceste puncte se numesc: puncte homologue.



Să considerăm deci în interiorul unui corp homogen, un punct A. - După principiul omogenității trebuie ca, dacă ducem prin punctul A o dreaptă oricare Ax, ea trebuie să întâlnească la distanțe egale mai multe puncte

homologue: a, a', a''... așa ca distanțele Aa, Aa', Aa''... să fie egale între ele. Acest sir de puncte homologue constituie un rând. Dacă considerăm în o altă direcție Ay, un punct homolog b, atunci pe dreapta Ay se vor găsi alte puncte homologue b', b''... așa ca să avem: $Ab = bb' = b'b''$... distanța Ab putând să fie deosebită de Aa. - Dacă transportăm dreapta Ax paralel cu ea însuși, așa ca punctul A să ocupe pe Ay succesiv pozițiile, b, b', b''..., atunci diversele puncte homologue a, a', a''... vor ocupa pozițiile: a, a', a''... și atunci în planul $\angle Ay$ se va forma oretea,

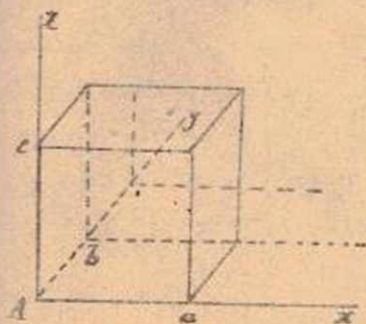
compusă din un număr infinit de unghiuri
cu formă paralelogramică a căror noduri
sunt formate de punctele homoloage. —

În fine în altă direcție Ax vom găsi
un punct homolog c la o distanță Ac , de-
osebită de Aa și Ab ; pe direcția Ax vom
întâlni alte puncte homoloage $c', c'', \dots$
la distanțe egale: $Ac = cc' = cc'' \dots$. Dacă
acum considerăm că rețeaua xAy se mișcă
paralel cu ea însuși, așa ca punctul A să
ocupe succesiv pozițiile $c, c', c'' \dots$ pe di-
recția Ax , atunci spațiul cuprins între cele
trei planuri: xAy, xAx și yAx , va fi împar-
tit într-o infinitate de mici paralelipiede
egale, a căror unghiuri vor fi formate de pun-
tele homoloage, a căror distanțe sunt deo-
sebite în cele trei direcții Ax, Ay, Az . — Se
formează atunci aceea ce Bravais numește:
un sistem reticular. — —

Este evident că natura acestor sisteme re-
ticulare va varia: mai întâi după valoarea
unghiurilor ce fac între ele cele trei direc-
țiuni a randurilor, și apoi după valoarea
distanțelor Aa, Ab, Ac , care se cheamă: para-
metrii — sistemului reticular. Dând acestor
cantități, unghiuri și parametri, diverse valori

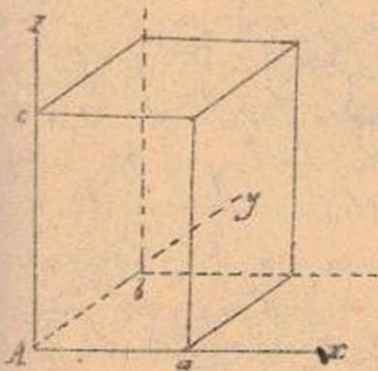
vom obține cele 7 sisteme reticulare ale lui Bravais.

1^o Presupunem că direcțiunile Ax , Ay , Az a rândurilor sunt dreptunghiulare: $\angle Ax = \angle Ay = \angle Az = 90^\circ$ și că, parametrii corespunzători sunt egali: $Aa = Ab = Ac$. Atunci paralelipipedele devin cuburi, și sistemul reticular se numește: tricvaternar.
 Vom vedea mai pe urmă



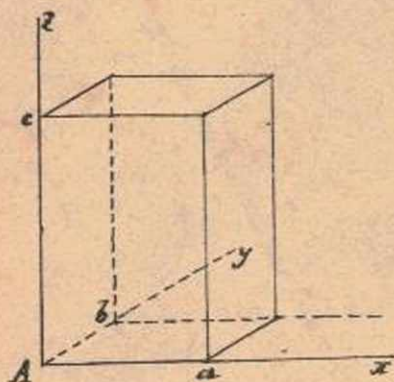
cauza acestei numiri. —

2^o Când direcțiunile rândurilor rămân dreptunghiulare și doi din parametri: Aa și Ab sunt egali, iar al treilea Ac diferă, atunci forma solidului elementar devine o priză dreaptă cu baza de pătrat, și sistemul reticular se numește: cvaternar.



3^o Dacă direcțiunile rândurilor rămân dreptunghiulare, iar cei trei parametri sunt diferiți, atunci forma solidului elementar devine

o prismă dreaptă cu bază de dreptunghi, iar sistemul reticular ia numele de: Terbinar. El

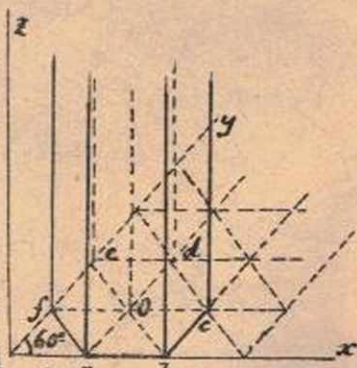


corespunde cu sistemul ortorombic a lui Levy. -

4^o Considerăm acum un sistem în care direcția rândurilor verticală e normală pe cele lalte două, care formează între ele un

de 60° și care au parametri egali.

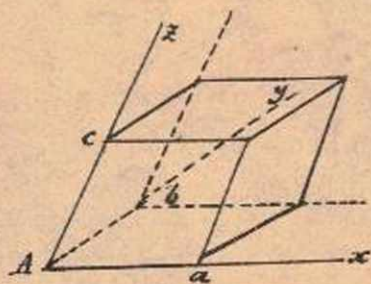
În acest caz ochiurile rețelei sunt niște romburi. Dacă ducem dreptele care să reprezinte diagonalele micilor romburi, se obține o rețea cu ochiuri triunghiulare și cu laturi egale, sau cu ochiuri hexagonale, și prin urmare sistemul reticular e compus din



prisme cu baza triunghiulară ab sau hexagonală. Acest sistem reticular se

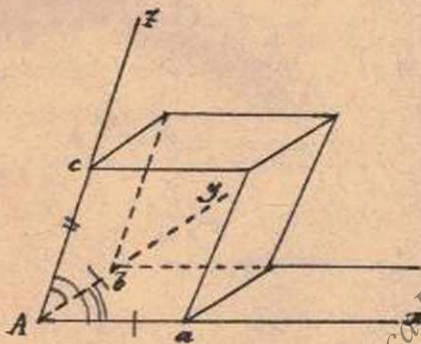
numește Senar. -

5^o Să presupunem că cele trei direcțiuni a rândurilor formează între ele

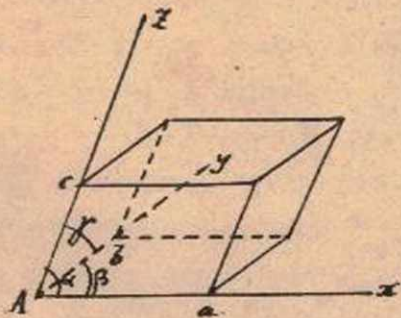


unghiuri egale, și că ochiul rețelei este rombic, așa
ca: $Aa = Ab = Ac$; vom obține un sistem reticular
compus din romboedre elementare, care se nu-
mește Ternar. — —

6^o Să luăm cele trei direcțiuni de rânduri
așa felin în cât să avem
unghiurile: $\alpha Ax = \alpha Ay$,
dar deosebite de αAy ,
iar parametrii $Aa = Ab$
înșă diferiți de Ac . Se va
obține astfel o rețea
rombică, care va dănaș-
tere la niște solide e-
lementare având for-
ma unor prizme obli-
ce cu bază de romb. Se obține astfel sistemul
reticular pe care Bravais îl numește Binar.



7^o Dacă considerăm di-
recțiunile rândurilor
ca formând între ele
unghiuri diferite:



α, β, γ și cei trei pa-
rametrii totuși diferiți, se
obține o rețea cu ochi
paralelogramici, care
dănaștere la niște

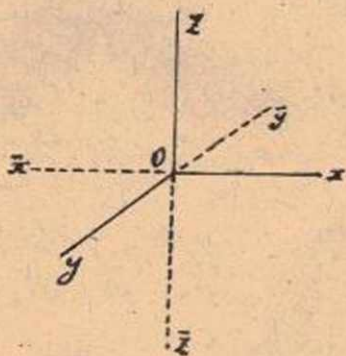
solide elementare, având forma de paralelipiped, și care formează sistemul reticular asimetric. —

Pentru Studiul formelor cristaline, Bravais consideră forma ochinului rețelei și axele de simetrie, făcând diverse suporiți asupra relațiilor lor și caista între ele. Pentru notațiune se serveste de parametri, pe care îi deduce din caracteristicile rândurilor și a planurilor reticulare, exprimându-i ca și Miller sub forma de indici. — Pentru calculele cristalografice se face uz de proiecțiile Stereografice, și mai ales de cele gonionice.

II Sistemele cristalografice germane. Notațiunea lui Weiss și Rose.

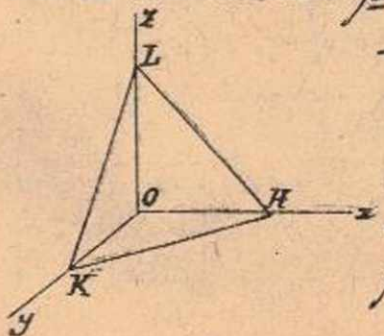
Am văzut ca, cristalografii francezi consideră în Sistemul lui Levy formele primitive și deduc formele secundare prin truncheturi; în acest caz trebuie să considerăm cele trei muchii ce concurează la formarea unui unghi solid. Cristalografii germani au voit a se sustrage necesității formelor primitive, și dând

Cristalografiei un caracter cu totul Geometric
 au luat ca baza sistemelor lor cristalogra-
 fice, existența axelor. — După Weiss și Rose
 se consideră axele, care se întâlnesc în cen-
 trul cristalului. — Știm în adevăr că, po-
 zitiunea unui punct în spațiu e determinată



când se cunosc distanțele
 acestui punct la trei drep-
 te care se cheamă axe de
coordonate; aceste drep-
 te pleacă din același punct
 care se cheamă origina,
 iar distanțele punctului
 la axe se numesc: Coor-
datele punctului. Dacă

considerăm axele Ox , Oy , Oz , direcțiunile ast-
 felu considerate sunt pozitive, pe când pre-
 lungirile lor dincolo de O , Ox' , Oy' , Oz' sunt di-
 recțiunile negative. Dacă considerăm ace-
 le două câte două, ele formează trei pla-
 nuri numite: planuri de coordonate. —



Dacă considerăm un plan
 care trece axele de coordona-
 te în punctele: H , K , L , la
 distanțele OH , OK , OL , de la
 origina, pozițiunea acestui
 plan va fi determinată,

când se vor cunoaște distanțele OH , OK , OL , care se numesc: Parametrii planului sau a feței HKL .

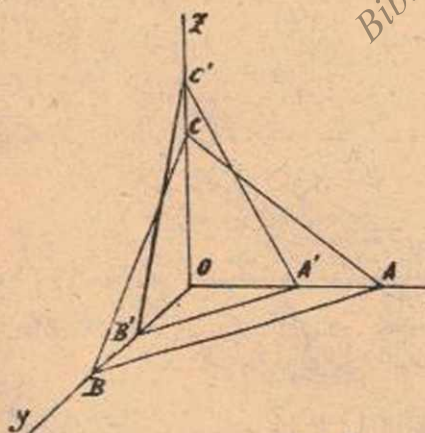
Weiss și Rose, admit axele care, luate egale cu 1, sunt caracterizate prin litere. Aceste litere pot să fie aceleasi sau diferite în parte sau în totalitate, după lungimea axelor. Când o față atinge axele la extremități, simbolul acelei fețe e reprezentat prin raportul parametrilor. Dar dacă față atinge axele la distanțe mai mari sau mai mici de cât parametrii fundamentali, pentru a nota aceasta față, facem ca fiecare literă corespunzătoare parametrilor să fie precedată de o caracteristică, care indică

distanța la care față atinge axa corespunzătoare.

Să admitem trei axe dreptunghiulare cu parametri neegali (Sistemul ortorombic) și să punem:

$$OA = a, OB = b, OC = c.$$

a, b, c fiind parametri fundamentali, corespunzători axelor, Ox, Oy, Oz . Fața ABC care atinge axele la



extremități, va fi reprezentată prin simbolul: $a : b : c$.

Insa fata $A'B'C'$, care ia pe axe lungimele: $OA' = \frac{1}{m} a$, $OB' = \frac{1}{n} b$ și $OC' = pc$, va fi reprezentată prin simbolul: $\frac{1}{m} a : \frac{1}{n} b : pc$.

Sau, făcând sa dispară numitorii: $na : mb : mnp c$.

Dacă una din cantitățile m, n, p devine zero, atunci avem caracteristica: $1 = \infty$ ceea ce înseamnă că, ~~ata~~ afectată de caracteristica ∞ , e paralela cu fata. - Asa: Simbolul: $\infty a : \frac{1}{n} b : pc$, indică o fată paralela cu axa Ox . -

Dacă axele lui Weiss și muchile formelor primitive a lui Sevy ar fi paralele, atunci transformarea notatiunelor ar fi foarte usoară; fiind că nu este așa, trebuie căutate formule de transformare. -

Notatiunea lui Naumann.

Naumann a simplificat mult notatiunea lui Weiss. De si el admite aceleasi axe, uneori le pune în o ordine deosebită. Pentru Sistemul cubic, parametrii fundamentali sunt aceiasi, notati cu litera: a.

Pentru Sistemul patratie, pe care el îl numește Tetragonul, cele două axe orizontale sunt egale, dar deosebite de axa verticală; parametrii sunt: a pentru axele orizontale și c pentru axa verticală. — Si așa mai departe pentru cele l. alte sisteme. —

După Naumann una din caracteristice este tot de-a-una egală cu 1; apoi el întrebuințează notațiune și un simboluri. —

Pentru notațiune el procedează astfel: admite ca formă fundamentală Piramida, și notează cu litera P inițiala curântului piramidă, orice fată ce atinge axele la extremități. La excepțiune avem: sistemul Cubic, pentru care se întrebuințează litera O, inițiala curântului Octaedru și sistemul Romboedric, la care întrebuințează litera R inițiala curântului Romboedru. — Pentru orice altă formă, chiar piramidată, care atinge cele două axe la distanțe deosebite de 1, el întrebuințează caracteristică, care sunt scrise înainte sau după literele P, O sau R. Să luăm un exemplu: Piramida Ortorombică este însemnată de Weiss, cu simbolul: $a:b:c$, pe când Naumann o însumează cu notațiunea P. Dar sunt piramide a căror fată atinge axele orizontale la extremități, iar axa verticală la

distanțe diferite de 1. După Weiss avem Simbolul : $a : b : mc$, în fund 2. Naumann pune înaintea notațiunii P , caracteristica ce afectează axa verticală, pe când caracteristica corespunzătoare unuia din axele orizontale este scrisă după litera P . Atunci notațiunea corespunzătoare simbolului precedent va fi :

mP .-

Dar, dacă fatetele piramidei tău una din axele orizontale la o distanță deosebită de 1, vom avea simbolele : $na : b : mc$ sau $a : nb : mc$. Căroare corespunde notațiunea : mPn .-

Însă, pentru a deosebi formula corespunzătoare celor două Simboluri a lui Weiss, Naumann observă că primul Simbol se referă la o fată care atinge mica diagonală a rombului de bază, la o distanță mai mare de cât 1; este deci fată unei piramide lungită după diagonală mica, pe când al doilea Simbol se referă la o fată, care atinge diagonală mare la o distanță mai mare de cât 1. Pentru a le deosebi, el întrebuințează numele de Brachidiagonală pentru diagonală scurtă și Macrodiagonală, pentru cea lungă; atunci numele Brachipiramidă pe cea întâi și o notează : mPn

pe când pe a doua o numește Macropiramida și o notează: mPn. --

După cele ce am văzut până acum, Sistemul de notatiune a lui Naumann, ca și cel a lui Levy, este un sistem general, adică: notatiunea reprezintă în același timp Soli-
dul întreg, precum și fiecare din fețele lui. --

III.

Sistemul cristalografic englez. Notatiunea lui Miller.

Deoarece notatiunea cristalografică a lui Miller se face în

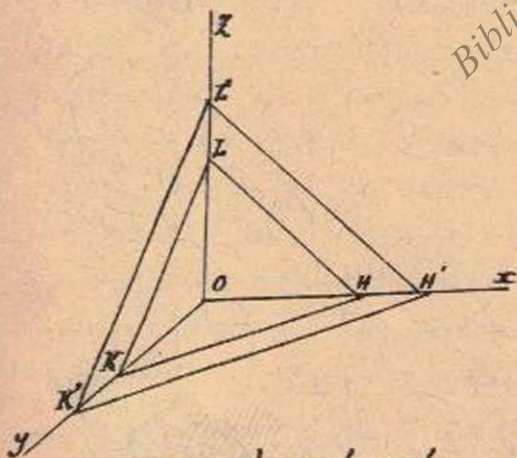
Indici, să vedem mai

întâi definiția lor. --

Să considerăm planul HKL , a cărui parametri sunt: OH , OK , OL . Dacă înlocuim planul acestui feță paralel cu sine însuși, în poziția $H'K'L'$, parametrii săi vor deveni: OH' , OK' , OL' , așa că putem scrie:

$$OH' = OH \times m, \quad OK' = OK \times n, \quad OL' = OL \times p. --$$

De unde deducem:



$$\frac{OH'}{OH} = m, \quad \frac{OK'}{OK} = n, \quad \frac{OL'}{OL} = p.$$

Fiind că fețele HKL și $H'K'L'$ sunt paralele, laturile omologhe sunt și ele paralele, și atunci triunghiurile OKL și $OK'L'$ etc. sunt asemenea și vor avea deci laturile omologhe proportionale. Vom avea deci:

$$\frac{OH'}{OH} = \frac{OK'}{OK} = \frac{OL'}{OL} = m = n = p.$$

de unde: $OH' = OH \times m$, $OK' = OK \times m$, $OL' = OL \times m$

Deci: transportând fața HKL paralel cu ea însăși, parametrii acestor fețe au fost multiplicați cu aceeași cantitate. -

Să considerăm acum fața HKL , a cărei parametri cunoscuți

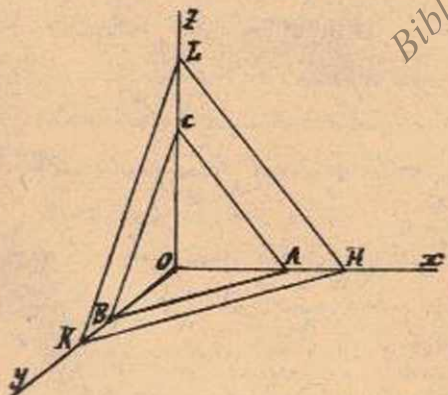
sunt: OH , OK , OL : acesta este planul principal.

Fie o altă fața ABC , a cărei parametri: OA , OB , OC sunt necunoscuți.

Pentru a determina această din urmă față, este de ajuns a cunoaște ra-

porturile între parametrii feței cunoscute și cei ai feței necunoscute: Fie:

$$\frac{OH}{OA} = h, \quad \frac{OK}{OB} = k, \quad \frac{OL}{OC} = l. \quad \text{de unde:}$$



$$OA = \frac{OH}{h}, \quad OB = \frac{OK}{K}, \quad OC = \frac{OL}{l}.$$

Deci: fata ABC va fi determinată dacă vom cunoaște parametrii OH, OK, OL și raporturile: h, K, l . Dacă fata HKL e cunoscută putem considera parametrii săi egali cu unitatea: $OH = OK = OL = 1$.

Atunci vom avea: $\frac{1}{OA} = h, \frac{1}{OB} = K, \frac{1}{OC} = l$.

Noile valori a lui h, K, l , se numesc: Indicii fetei și sunt inversele parametrilor fetei necunoscute.

Este ușor de văzut că: dacă axele lui Sevy și a lui Miller coincid, atunci indicii lui Miller sunt inversele caracteristicilor lui Sevy. Așa din notațiunea lui Sevy: $b^1 b^2 b^3$ deducem după Miller: (120).

Trebue să observăm de la început că, indicii trebue să fie tot de a una numerum-tregi și raționali. Să admitem că, pentru cea două fată precedentă avem:

$$OH = 1, \quad OK = 2, \quad OL = 3, \quad OA = 2, \quad OB = 3, \quad OC = 4.$$

Vom avea pentru valorile indicilor:

$$h = \frac{OH}{OA} = \frac{1}{2}, \quad K = \frac{OK}{OB} = \frac{2}{3}, \quad l = \frac{OL}{OC} = \frac{3}{4}.$$

Să aducând la forma întreagă:

$$h = \frac{1 \cdot 3 \cdot 4}{2 \cdot 3 \cdot 4} = 12, \quad K = \frac{2 \cdot 2 \cdot 4}{3 \cdot 2 \cdot 4} = 16, \quad l = \frac{3 \cdot 3 \cdot 2}{4 \cdot 2 \cdot 3} = 18,$$

Sau: $h=6$, $K=8$, $l=9$. Fata va fi deci notata:
(6.8.9). -

Notatiunea generală a unei fete în indici
va fi deci: (hKl) . -

Dar această notatiune poate să varieze
după valorile indicilor. Se pot prezenta ur-
matoarele cazuri:

1^o Să admitem că $l=0$; atunci notatiunea
devine: $(hK0)$. Dacă $l=0$ vom avea: $Ol = 0$.
Insa Ol e constant și diferit de zero, deci
va trebui să avem: $Ol = \infty$ și atunci avem:
 $Ol = 0$. Aceasta înseamnă că fata notată
 $(hK0)$ atinge axa OZ la infinit, deci este
paralelă cu această axă. Rezultă dar că:
Dacă într-o notatiune a unei fete, unul din
indici este zero, fata astfel notată este
paralelă cu axa, în raport cu care indicele
este zero. - Astfel: notatiunea $(h0l)$ re-
prezintă o fată paralelă cu axa y , și $(0kl)$
o fată paralelă cu axa x . -

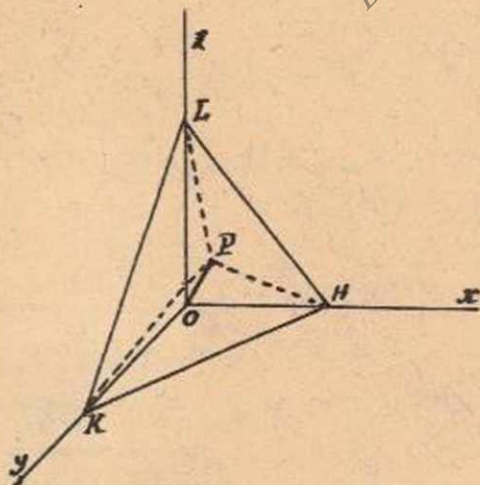
2^o. Dacă doi indici sunt zero, fata nota-
tă e paralelă cu planul axelor în raport cu
care indicii sunt zero. - Așa: fata: $(h00)$,
având $K=0$, e paralelă cu axa y , și având
 $l=0$ e paralelă cu axa z ; deci ea este para-
lă cu planul YOZ . Cu alte cuvinte:

O notatiune care are doi indici zero, reprezintă unul din planurile de coordonate, sau un plan paralel cu acesta.

Sistemul de notatiune a lui Miller este fără îndoială cel mai perfect. Si fiind că el tinde a înlocui celelalte sisteme de notatiune, ne propunem de a stabili și a studia principalele proprietăți, precum și cele mai importante relațiuni care există între indici.

Vom stabili mai întâi: o relațiune ce există între indicii unei fețe, lungimea axelor și unghiurile ce face normala la față cu axele.

Să considerăm



și deducem:

fața HKL și normala OP la această față; să unim punctul P cu punctele H, K, L ; se obțin trei unghiuri drepte: unghiurile HOP, KOP, LOP , care ne dau relațiunile următoare:

$$\frac{OP}{OH} = \cos POX$$

$$\frac{OP}{OK} = \cos POY$$

$$\frac{OP}{OL} = \cos POZ$$

$$\frac{OP}{OL} = \cos POZ$$

$$OP = OH \cos POX = OK \cos POY = OL \cos POZ \dots (1)$$

Dacă însumăm cu: $\underline{a}$, $\underline{b}$, $\underline{c}$ parametrii planului principal și cu $\underline{h}$, $\underline{k}$, $\underline{l}$ indicii fetei HKL , atunci avem:

$$h = \frac{a}{OH}, \quad k = \frac{b}{OK}, \quad l = \frac{c}{OL} \quad \text{de unde:}$$

$$OH = \frac{a}{h}, \quad OK = \frac{b}{k}, \quad OL = \frac{c}{l}$$

Înlocuind aceste valori în ecuația (1) avem:

$$OP = \frac{a}{h} \cos POX = \frac{b}{k} \cos POY = \frac{c}{l} \cos POZ \dots (2)$$

Acastă ecuație, care e foarte importantă, și de care avem a ne servi mai târziu, se poate simplifica în cazuri anumite. —

Când fata HKL devine paralelă cu Ox , avem: $h = \frac{1}{\infty} = 0$, deci $\cos POX = 0$, și ecuația (2) devine: $OP = \frac{b}{k} \cos POY = \frac{c}{l} \cos POZ \dots (3)$

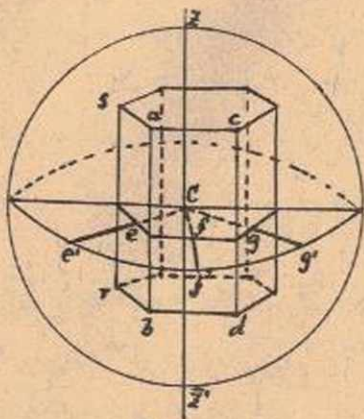
Când fata HKL e paralelă și cu Ox și cu Oy atunci: $h = 0$ și $k = 0$. Deci: $\cos POX = 0$ și $\cos POY = 0$. Atunci ecuația (2) se reduce la:

$$OP = \frac{c}{l} \cos POZ \dots (4)$$

Studiul zonelor.

Să considerăm o prismă hexagonală inserată în o sferă: din centrul C al sferei, care e și centrul cristalului, scoberăm perpendiculare

pe fețele prizmei și le prelungim până la întâlnirea sferei în punctele



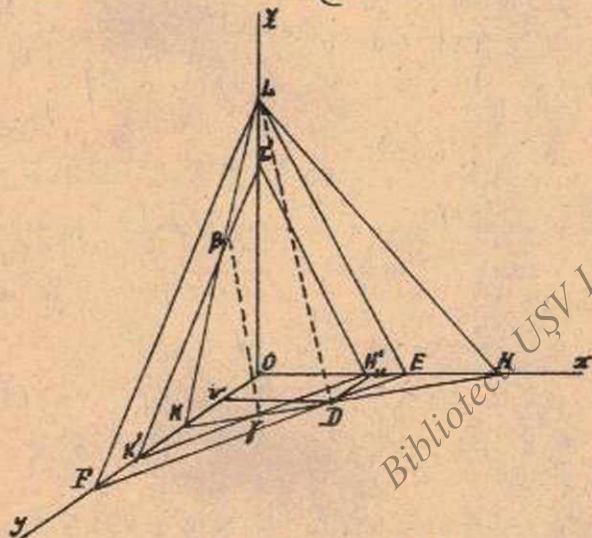
e', f', g': aceste puncte se numesc: polii fețelor considerate. Observăm în același timp că, fețele laterale: abcd, abrs etc. sunt paralele cu axa ZZ' , și prin urmare și intersecțiile acestor fețe: ab', cd', rs etc. vor

fi paralele cu axa ZZ' . Fețele astfel așezate se zic că sunt în zonă, iar axa ZZ' se numește axa zonei. Dacă prin centrul C al sferei ducem un plan orizontal, acesta va determina în sferă un cerc mare, în planul căruia se vor afla perpendicularele Cee', Cff' etc. iar punctele e', f' ... polii fețelor se vor afla pe circumferența cercului orizontal. Urmărește dar că: polii fețelor în zonă sunt situați pe circumferența aceluiași cerc mare. —

— Chestiunile pe care avem să le studiem relativ la fețele în zonă, se reduc la căutarea relațiilor ce există între indiciu fețelor în zonă și indiciu axei de zonă. În adevăr: dacă presupunem că o față face parte din o zonă a căreia axă este Ox ,

si din alta fona a cãrui axã este Oy , este evident cã, fata fiind paralelã cu Ox si Oy , va fi paralelã cu planul celor douã drofite. — —

Mat întâi vom stabili: relatiunea ce există între indicele a două fete care fac o zonă și indicele acei de zonă. - Să considerăm sistemul



de trei axe dreptun-
ghulare: Ox, Oy, Oz
și două fete: HKL
și $H'K'L'$, care se tăie
după $\beta\gamma$, care de-
termină direcțiunea
acei de Zonă a celor
două fete. Dacă mis-
căm fata $H'K'L'$ pa-
ralel cu ea însuși
până ce trece prin
 L , atunci intersecția

3) Se mișcă paralel cu ea însuși și devine drap-
ta L'D. - Această nouă intersecție ne va servi prin-
tun a defini axa Zonei. Prin mișcarea fetei H'K'L' pa-
ralel cu ea însuși, parametrii ei au fost înmulțiți
cu o cantitate constantă. În adevăr: L'K' fiind
paralelă cu LF, triunghiurile OK'L' și OFL sunt
asemenei și ne dau: $\frac{OF}{OK'} = \frac{OL}{OL'}$

Le $OH'L'$ și $OE L$ sunt asemenea și ne dau:

$$\frac{OE}{OH'} = \frac{OL}{OL'} \quad \text{și} \quad \frac{OL}{OL'} = \frac{OL}{OL'}$$

Din aceste trei relațiuni se deduce:

$$OF = OK' \frac{OL}{OL'}, \quad OE = OH' \frac{OL}{OL'} \quad \text{și} \quad OL = OL' \frac{OL}{OL'} \dots\dots (a).$$

Pentru a determina intersecția LD , e de ajuns să cunoaștem parametrul punctelor L și D . Avem atunci: Pentru L ... $x=0, y=0, z=OL$.

$$D \dots x=Ou, y=Ov, z=0.$$

Va trebui dar să găsim valorile lui OL, Ou, Ov .

În figura precedentă observăm că: în triunghiul OHK , dreapta uD este paralelă cu OK și avem:

$$\frac{OK}{uD} = \frac{OH}{OH - Ou} \quad \text{sau:} \quad \frac{OK}{uD} = \frac{OH}{OH - Ou} \dots\dots (\beta).$$

De asemenea în triunghiul OEF , avem uD paralel cu OF , deci: $\frac{OF}{uD} = \frac{OE}{OE - Ou}$ sau: $\frac{OF}{uD} = \frac{OE}{OE - Ou} \dots\dots (\gamma).$

Din relațiunea (β) deducem: $OK(OH - Ou) = uD \cdot OH$.

Din relațiunea (γ) deducem: $OF(OE - Ou) = uD \cdot OE$.

Făcând înmulțirile avem:

$$OK \cdot OH - OK \cdot Ou = uD \cdot OH \dots\dots (\delta)$$

$$\text{și} \quad OF \cdot OE - OF \cdot Ou = uD \cdot OE \dots\dots (\epsilon)$$

Pentru a avea valorile lui Ou și uD , înmulțim pe (δ) cu OE și pe (ϵ) cu OH și avem:

$$OK \cdot OH \cdot OE - OK \cdot Ou \cdot OE = uD \cdot OH \cdot OE$$

$$OF \cdot OE \cdot OH - OF \cdot Ou \cdot OH = uD \cdot OH \cdot OE$$

De unde: egalând membrii întâi, deducem:

$$OK \cdot OH \cdot OE - OK \cdot Ou \cdot OE = OF \cdot OE \cdot OH - OF \cdot Ou \cdot OH.$$

de unde:
$$Ou = \frac{OF \cdot OE \cdot OH - OK \cdot OH \cdot OE}{OF \cdot OH - OK \cdot OE}.$$

Sau
$$Ou = OE \cdot OH \cdot \frac{OF - OK}{OF \cdot OH - OK \cdot OE}.$$

Înlocuind valorile lui OE și OF scosese din (4) avem:

$$Ou = OH \cdot OH' \cdot \frac{OL}{OL'} \cdot \frac{OK' \cdot \frac{OL}{OL'} - OK}{OK' \cdot \frac{OL}{OL'} \cdot OH - OK \cdot OH' \cdot \frac{OL}{OL'}}.$$

Făcând calculele și reducerile necesare, ne vom:

$$Ou = \frac{OH \cdot OH' \cdot OK' \cdot OL - OH \cdot OH' \cdot OK \cdot OL'}{OL' \cdot OK' \cdot OH - OL' \cdot OK \cdot OH'}.$$

Înmulțind membrul al doilea al egalității cu: $\frac{OL' \cdot OK' \cdot OH - OL' \cdot OK \cdot OH'}{OH \cdot OH' \cdot OH - OK' \cdot OL \cdot OL'}$ și făcând reducerile necesare, rezultă:

$$Ou = \frac{1}{OK \cdot OL'} - \frac{1}{OK' \cdot OL}.$$

Vom proceda în același mod pentru a găsi valorile celor l. alți parametri și vom găsi:

$$u.D = \frac{1}{OH \cdot OL'} - \frac{1}{OH' \cdot OL}$$

$$\text{și } OL = \frac{1}{OH \cdot OK'} - \frac{1}{OH' \cdot OK}.$$

Pentru a transforma parametrii în indici, vom pune:

$$\begin{aligned} OH &= \frac{a}{g} & OK &= \frac{b}{r} & OL &= \frac{c}{s} \\ OH' &= \frac{a'}{g'} & OK' &= \frac{b'}{r'} & OL' &= \frac{c'}{s'} \end{aligned}$$

q, r, s și q', r', s' fiind indicii fetelor în Zonă iar a, b, c parametrii planului fundamental.

Dacă punem: $a = b = c = 1$ rezultă:

$$OH = \frac{1}{q} \quad OK = \frac{1}{r} \quad OL = \frac{1}{s}$$

$$OH' = \frac{1}{q'} \quad OK' = \frac{1}{r'} \quad OL' = \frac{1}{s'}$$

Înlocuind aceste valori în ecuațiile precedente avem:

$$Ou = \frac{1}{\frac{1}{r} \cdot \frac{1}{s}} - \frac{1}{\frac{1}{r'} \cdot \frac{1}{s'}} = rs' - r's..$$

$$uD = \frac{1}{\frac{1}{q} \cdot \frac{1}{s'}} - \frac{1}{\frac{1}{q'} \cdot \frac{1}{s}} = qs' - q's = q's - qs'..$$

$$OL = \frac{1}{\frac{1}{q} \cdot \frac{1}{r'}} - \frac{1}{\frac{1}{q'} \cdot \frac{1}{r}} = qr' - q'r..$$

Și dacă însumăm valorile indicilor axei de Zonă: $Ou = u, uD = v, OL = w$ vom avea în definitiv:

$$\left. \begin{aligned} u &= rs' - r's \\ v &= q's - qs' \\ w &= qr' - q'r \end{aligned} \right\} \dots \dots (I)$$

. Aceste ecuații reprezintă relațiile ce există între indicii axei de Zonă și indicii fetelor ce formează Zonă. Aceste formule fiind foarte întrebuintate, s'a căutat o regulă mnemonică pentru a le găsi ușor. - Pentru aceasta se scrie de două

ou de a rândul indicii celor două fete pe două linii, unul deasupra celorlalti, apoi se separă prin linii verticale indicii extremi și se înmulțesc în cruce doi câte doi indicii ramasi, scăzînd produsele de ordin păreche din produsele de ordin nepăreche, ținînd seamă de indicele afectat de semn. -

Vom avea astfel:

$$\begin{array}{c|cc|cc|c} q & r & s & q & r & s \\ q' & r' & s' & q' & r' & s' \end{array}$$

$$u = rs' - r's \quad v = sq' - s'q \quad w = qr' - q'r.$$

Să stabilim acum ecuația dreptei de intersecție a celor două fete. - -

Se știe că ecuația unui plan ce trece prin origină este: $\frac{x}{a} + \frac{y}{b} + \frac{z}{c} = 0$.

Dacă considerăm fetele precedente: qrs și $q'r's'$ trecînd prin origină, ecuațiile lor vor fi:

$$\left. \begin{array}{l} q\frac{x}{a} + r\frac{y}{b} + s\frac{z}{c} = 0 \\ q'\frac{x}{a} + r'\frac{y}{b} + s'\frac{z}{c} = 0 \end{array} \right\} \dots (a)$$

Pentru a găsi intersecția lor e de ajuns a considera simultan aceste două ecuații și vom avea: $q\frac{x}{a} + r\frac{y}{b} + s\frac{z}{c} = q'\frac{x}{a} + r'\frac{y}{b} + s'\frac{z}{c} = 0 \dots (b)$.

Divizînd primul membru al acestei ecuații

prin q și al doilea prin q' avem:

$$\frac{x}{a} + \frac{r}{bq}y + \frac{s}{cq}z = \frac{x}{a} + \frac{r'}{bq'}y + \frac{s'}{cq'}z.$$

Sau: $cq'r'y + bq's'z = cqr'y + bqs'z$ Sau:

$$\frac{y}{b(qs' - q's)} = \frac{z}{c(q'r - qr')} \dots (c)$$

Divizând primul membru al ecuației (b) prin r și pe al doilea prin r' vom avea:

$$\frac{x}{a(rs' - r's)} = \frac{z}{c(q'r - qr')} \dots (d)$$

Considerând simultan ecuațiile (c) și (d) avem:

$$\frac{x}{a(rs' - r's)} = \frac{y}{b(qs' - q's)} = \frac{z}{c(q'r - qr')} \dots (e)$$

Înlocuind cantitățile din parenteză prin valorile lor, care sunt indicii axei de zonă, avem:

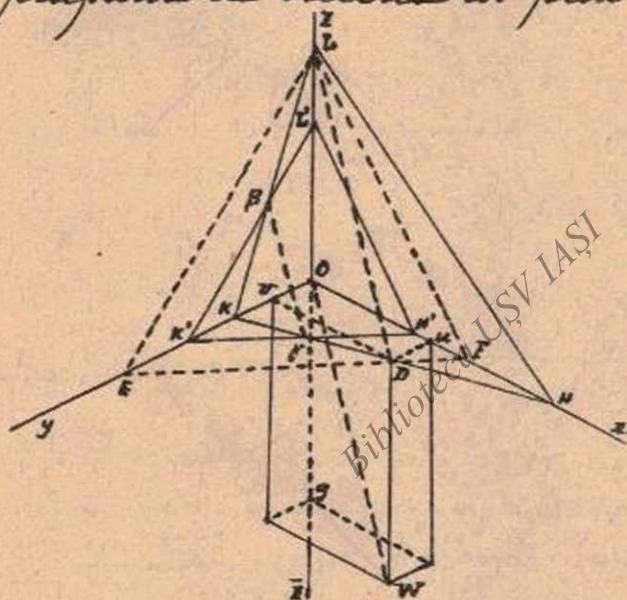
$$\frac{x}{au} = \frac{y}{bv} = \frac{z}{cw} \dots (f)$$

Aceasta este ecuația axei de zonă. -

— Să stabilim acum: Condițiunea pentru ca o fată Q (efg) să poată face parte din zona formată de fețele: P(hkl) și P'(h'k'l'). - Putem ajunge la rezultat prin două metode:

I. — Pentru ca fată Q să poată face parte din zona fețelor P și P', trebuie ca intersecția

fetelor P și P' să fie paralelă cu intersecția fetelor P' și Q și atunci, aceste două intersecții transportate paralel cu ele însuși, până ce trec prin origina, trebuie să coincidă. Deci trebuie să căutăm relațiunile care trebuie să existe între indicii fetelor P , P' și Q pentru ca intersecțiile acestor fete să se suprapună la trecerea lor prin origina. —



Să considerăm fetele HKL și $H'K'L'$, a căror intersecție este β ; să transportăm paralel cu ea însuși fața $H'K'L'$ până în EhF , când intersecția $L'D$ cu fața HKL atinge axa Oz . Insa am văzut mai înainte că aceasta schimbare consistă în a înmulți parametrul fetei

$H'K'L'$ cu o constantă $\frac{OL}{OL'}$. — Pe componentele intersecției $L'D$, care sunt: Ou , Ov , și Og ($Og = OL$) să construim un paralelipiped, a cărui diagonală OW e paralelă și egală cu $L'D$ și trece prin origina. — Dacă am construi un paralelipiped pe intersecția β sau pe componentele sale, va trebui ca, diagonală acelui paralelipiped să fie paralelă cu $L'D$, și pentru

ca ea să treacă prin origină și să se suprapună
lui OL , va trebui să înmulțim dimensiunile para-
lelipipedului construit pe $\beta\gamma$, cu constanta $\frac{OL}{\beta\gamma}$. -

Să procedem acum la stabilirea relațiilor nou-
tre. Să determinăm mai întâi axa de simetrie a fe-
țelor P și P' . Vom avea:

$$\begin{array}{c|ccc|c} h & K & l & h & K & l \\ h' & K' & l' & h' & K' & l' \end{array}$$

$$KL' - K'l, lh' - l'h, hK' - h'K$$

Pentru fețele P' și Q avem:

$$\begin{array}{c|ccc|c} h' & K' & l' & h' & K' & l' \\ e & f & g & e & f & g \end{array}$$

$$K'g - fl', l'e - gh', h'f - ek'.$$

Însă, după observația precedentă, trebuie ca, indicii
primei axe de simetrie să fie egali cu indicii celui
a doua axă de simetrie, înmulțite cu o constantă. -

$$\begin{aligned} KL' - K'l &= c(K'g - fl') \dots (1) \\ lh' - l'h &= c(l'e - gh') \dots (2) \\ hK' - h'K &= c(h'f - ek') \dots (3) \end{aligned}$$

Să înmulțim ecuația (1) cu e , ecuația (2) cu f și ecuația
(3) cu g . Vom avea:

$$\begin{aligned} e(KL' - K'l) &= ce(K'g - fl') \\ f(lh' - l'h) &= cf(l'e - gh') \\ g(hK' - h'K) &= cg(h'f - ek') \end{aligned}$$

Dacă adunăm aceste egalități vom avea:

$$e(KL' - K'L) + f(Lh' - L'h) + g(hK' - h'K) = ce(Kg - fl') + cf(L'e - gh') + cg(h'f - ek').$$

Făcând operațiile în al doilea membru, vom găsi să el se reducă la Zero. Vom avea dar:

$$e(KL' - K'L) + f(Lh' - L'h) + g(hK' - h'K) = 0.$$

Punând: $KL' - K'L = u$, $Lh' - L'h = v$, $hK' - h'K = w$

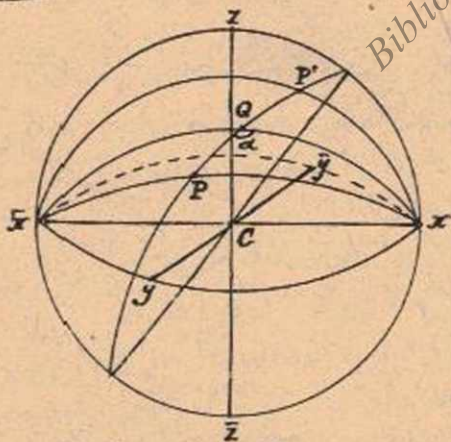
vom avea:
$$eu + fv + gw = 0. \dots (4)$$

Relațiune care se exprimă astfel:

Suma produselor respective a indicilor axei de Zonă, cu indicii feței care face parte din Zonă, trebuie să fie egală cu Zero. — —

Accastă relațiune se numește: ecuația Zonelor. —

II. Să considerăm un cristal pe care se găsesc



fețele care ne interesează, dispus astfel încât originea axelor să coincidă cu centrul cristalului. Din centrul C al cristalului, cu o rață oarecare, să descriem o Sferă; Să scoberăm apoi perpendiculare pe fețele în Zonă și să le prelungim până ce ele

întâlnesc Sfera în punctele P, Q, P' , care sunt proiecții fețelor și se găsesc pe același cerc mare. Prin poli

P, Q, P' și extremitatea axei XX' , să facem să treacă arcuri de cerc mare, care formează astfel două triunghiuri sferice: PXQ și $P'XQ$. Însemnând cu α unghiul PQX , aceste două triunghiuri ne dau relațiunile:

$$\cos PX = \cos PQ \cos QX + \sin PQ \sin QX \cos \alpha$$

$$\cos P'X = \cos P'Q \cos QX - \sin P'Q \sin QX \cos \alpha$$

Pentru a elimina pe $\cos \alpha$, să înmulțim prima ecuație cu $\sin P'Q$ și pe a doua cu $\sin PQ$, și să le adunăm. Vom avea:

$$\sin P'Q \cos PX + \sin PQ \cos P'X = \sin P'Q \cos PQ \cos QX + \sin PQ \cos P'Q \cos QX$$

$$\sin P'Q \cos PX + \sin PQ \cos P'X = \cos QX [\sin P'Q \cos PQ + \sin PQ \cos P'Q]$$

Și fiind că, cantitatea între paranteze este:

$$\sin(P'Q + PQ) = \sin PP'$$

$$\text{avem: } \sin P'Q \cos PX + \sin PQ \cos P'X = \sin PP' \cos QX \dots (\alpha)$$

Unind succesiv prin arcuri de cerc mare, Polii P, Q, P' cu extremitatea axei Y și apoi a axei Z , vom obține relațiunile:

$$\sin P'Q \cos PY + \sin PQ \cos P'Y = \sin PP' \cos QY \dots (\beta)$$

$$\text{și } \sin P'Q \cos PZ + \sin PQ \cos P'Z = \sin PP' \cos QZ \dots (\gamma)$$

Să scoatem din (α) și (β) valorile lui $\sin P'Q$ și $\sin PQ$ și să le înlocuim în ecuația (γ) ; vom avea:

$$\cos PZ (\cos P'X \cos QY - \cos QX \cos P'Y) + \cos P'Z (\cos QX \cos PY - \cos QY \cos PX) + \cos QZ (\cos P'Y \cos PX - \cos PY \cos P'X) = 0.$$

De unde vom scoate:

$$\cos QX (\cos PY \cos P'Z - \cos P'Y \cos PZ) + \cos QY (\cos P'Y \cos PZ - \cos PX \cos P'Z) + \cos QZ (\cos P'Y \cos PX - \cos PY \cos P'X) = 0 \dots (d)$$

Dacă înșămăm cu: $\underline{a}, \underline{b}, \underline{c}$ lungimile axelor, fețele fiind caracterizate prin aceiași indici ca și mai înainte, vom pute scrie pentru ecuațiile acestor fețe:

$$\frac{a}{h} \cos PX = \frac{b}{k} \cos PY = \frac{c}{l} \cos PZ$$

$$\frac{a}{e} \cos QX = \frac{b}{f} \cos QY = \frac{c}{g} \cos QZ \quad \text{și}$$

$$\frac{a}{h'} \cos P'X = \frac{b}{k'} \cos P'Y = \frac{c}{l'} \cos P'Z$$

Din întâia și a treia din aceste relațiuni putem scoate valorile produselor: $\cos PY \cos P'Z \dots$ de care avem nevoie în ecuația (d). Înlocuind aceste valori și făcând reducerile ne pene:

$$\cos QX (kl' - k'l) a + \cos QY (lh' - l'h) b + \cos QZ (k'h - kh') c = 0$$

Însă cantitățile între parenteză reprezintă tot mai indicii axei de Zonă a fețelor P și P':

$$\begin{array}{c|ccc|c} h & k & l & h & k & l \\ h' & k' & l' & h' & k' & l' \end{array}$$

$$u = kl' - k'l, \quad v = lh' - l'h, \quad w = h'k - h'k$$

Înlocuind în ecuația de mai sus obținem:

$$ua \cos QX + vb \cos QY + wc \cos QZ = 0 \dots (e)$$

Din relațiunea: $\frac{a}{e} \cos QX = \frac{b}{f} \cos QY = \frac{c}{g} \cos QZ$ deducem:

$$\cos QX = \frac{ef}{ag} \cos QZ \quad \text{și} \quad \cos QY = \frac{fg}{bg} \cos QZ$$

Înlocuind în ecuația (e) după ce vom face reducerile vom obține:

$$eu + fv + gw = 0 \dots (f)$$

care este ecuația zonelor. — — —

Ne rămâne încă de stabilit: Condițiunea ce trebuie să îndeplinească o față, pentru ca să poată face parte din două zone, determinate de alte fețe.

Fie fața (qrs) și două axe de zonă: uvw și $u'v'w'$.
Relațiunile ce exprimă că fața (qrs) face parte din zona uvw și din zona $u'v'w'$ sunt:

$$qu + rv + sw = 0 \quad (1)$$

$$qu' + rv' + sw' = 0 \quad (2)$$

Să determinăm valorile lui q , r și s după condițiunile exprimate prin relațiunile (1) și (2).

Pentru a elimina pe r , înmulțim pe (1) cu v' și pe (2) cu v și avem:

$$v'qu + v'rv + v'sw = 0$$

$$vqu' + vr'v' + vsw' = 0$$

Scăzând a doua din întâia avem:

$$v'qu - vqu' + v'sw - vsw' = 0$$

$$\text{sau: } q(v'u - vu') = s(vw' - v'w)$$

$$\text{De unde: } q = \frac{s(vw' - v'w)}{v'u - vu'} \quad \text{sau:}$$

$$q = s \frac{vw' - v'w}{v'u - vu'} \quad (3)$$

Eliminând pe q în ecuațiile (1) și (2) avem:

$$r = s \frac{uw' - u'w}{u'v - uv'} = s \frac{u'w - uw'}{uw' - u'v} \quad (4)$$

Însă fiind că avem numai două ecuații pentru trei necunoscute, sistemul e nedeterminat; deci

oînce valoare vom da lui s , va satisface sistemul ecuațiilor (1) și (2). Să punem dar:

$$s = s \frac{uv' - u'v}{uv' - u'v} \dots (5)$$

Însă noi putem înmulți indiceii unei fețe cu o cantitate constantă, fără ca valoarea cristalografică a feței să se schimbe. Să le înmulțim cu:

$$\frac{uv' - u'v}{s}. \text{ Vom avea: } q = vw' - v'w \dots (\alpha)$$

$$r = u'w - uw' \dots (\beta)$$

$$s = uv' - u'v \dots (\gamma)$$

Aceste relații ne indică valorile indicilor feței în funcțiune de indiceii axelor de zonă din care feța trebuie să facă parte. —

Pentru a stabili mai ușor aceste formule, putem întrebuința regula mnemonică, ca și pentru legea zonelor: —

u	vw	u	v	w
u'	$v'w'$	u'	v'	w'

$$q = vw' - v'w, r = u'w - uw', s = uv' - u'v. —$$

IV

Sistemele de reprezentare grafică a formelor cristaline.

Pentru a pute studia formele cristaline, nu e

de ajuns a ști să dăm o notațiune fetelor acelor forme; trebuie să știm încă a le reprezenta, așa ca ele să ne poată servi, fie pentru a ne face o idee de forma generală a cristalului, fie pentru a ne ajuta în calculele cristalografice. Putem ajunge la aceste rezultate pe cale de perspectivă. —

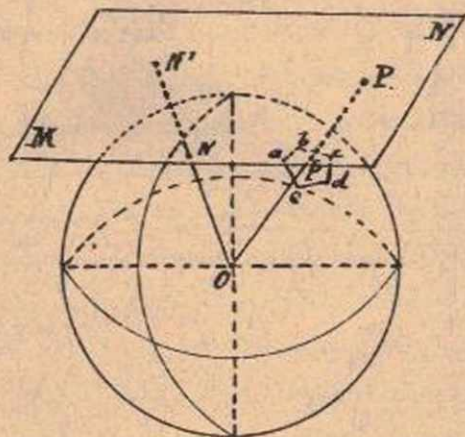
În primul caz ne servim de Perspectiva cavaliere, care consistă în a proiecta cristalul pe un plan paralel cu două din muchile cristalului, — și care este de ordinar, planului tabloului, pentru aceasta ne închipuim cristalul transportat la o oarecare distanță și ducem liniile ce reprezintă muchile așa ca să putem face ca să se vadă cât mai multe fețe posibile, fără a sacrifica pentru această formă admisă în general pentru cristal. În unele cazuri este comod de a proiecta cristalul pe una din fețele sale, prin normale la planul feței: aceasta este: Proiecția ortogonală.

Însă, pentru a pute face calculele cristalografice, avem nevoie de a reprezenta formele cristaline, cât se poate mai exact, și ajungem la acest rezultat prin: perspectiva sferică. —

Sunt două feluri de perspective sferice: proiecția gnomonică și proiecția stercografică. —

Proiecția gnomonică. În proiecția gnomonică se consideră cristalul în interiorul unei sfere, așa ca centrul cristalului să coincidă cu

centrul sferei, iar axa principală a cristalului să se confunde cu diametrul vertical al sferei. Ca plan de proiectiune se ia planul orizontal tangent sferei, la extremitatea axei verticale, iar punctul de vedere se considera în centrul sferei. — Dacă vom proiecta o față: abcd pe planul MN, vom



uni punctul de vedere O cu centrul p al feței și vom prelungi dreapta Op până la întâlnirea cu planul MN

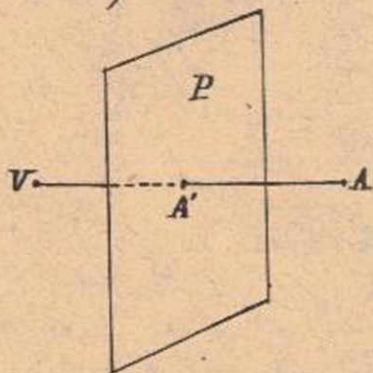
în punctul P, care reprezintă proiecția gnomonică a feței abcd. — În acest sistem de proiecție avem un singur avantaj: proiecția cercurilor mici e reprezentată prin linii drepte. Ca dezavantaje avem:

- 1^o Cercurile mici se proiectează după elipse și atunci rezolvirea triunghiurilor sferice este foarte grea și
- 2^o Punctele situate aproape de planul orizontal ce trece prin centru, adică aproape de baza hemisferei superioare, se proiectează la infinit. —

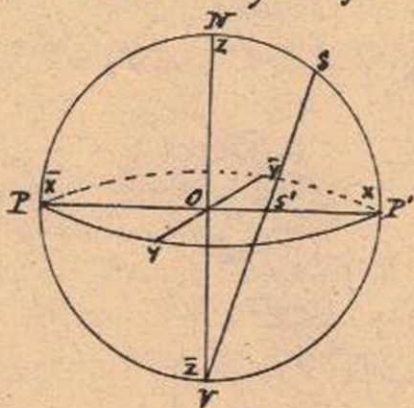
Mallard în tratatul său de Cristalografie a făcut un alt uz de proiecția gnomonică: el a înlocuit fețele prin o rețea polară a rețelei primitive a cristallului. —

Proiecțiunea stereografică imaginată de Neumann a fost întrebuințată de Hiller și în timpurile noastre este cea mai utilizată. Vom căuta dar a o studia cu toate detaliile. -

Să considerăm planul P și punctul A în fața acestui plan. Dacă în V de cea-l-altă parte a planului se găsește ochiul observatorului, care se numește Punct de vedere, și dacă unim pe V cu A prin o dreaptă care întâlnește planul P în punctul A' , acest punct se numește Perspectiva lui A pe planul P , căruia se da numele de Plan de Proiecție. -



Pentru a avea perspectiva unei figuri este de ajuns de a determina perspectivele unui mare număr de puncte de ale figuri și a le uni prin linii continue. -



În perspectiva stereografică se consideră cristalul înscris într-o sferă numită Sferă de Proiecție. Ca plan de proiecție se ia planul cercului mare orizontal PP'

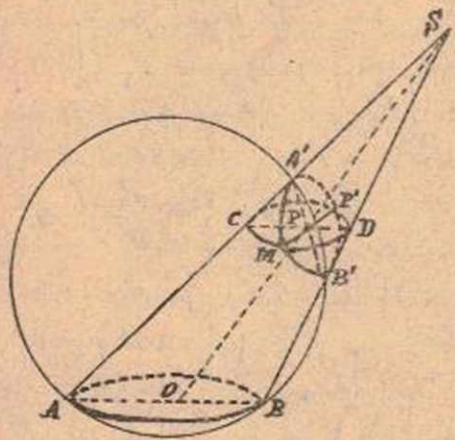
ce trece prin centrul O al Sferii, iar punctul de vedere V se afla la extremitatea inferioară a diametrului NV , perpendicular pe planul de proiectie. - Cristalul, a cărui fațete vom a proiecta, este așezat așa ca, centrul său să coincidă cu centrul O al Sferii, care este în același timp și origina axelor de coordonate XX' , YY' , ZZ' , la care se rapoartă cristalul. - Mai întâi vom determina Polii fațetelor cristalului, care se află deasupra planului de proiectie, și apoi vom construi perspectiva acestor poli pe planul de proiectie. În figura precedentă, proiectia polului S se va afla dacă vom uni acest pol cu punctul de vedere V ; punctul S' unde dreapta SV întâlnește planul de proiectie este perspectiva sau proiectia polului S . - - -

— Înainte de a vede în ce mod se pot reprezenta în perspectivă Stereografică, diverse elemente geometrice de care avem a ne servi, să stabilim oarecare probleme fundamentale, pe care se bazează proiectia Stereografică.

I. Proiectia unui cerc de pe sferă pe un cerc.

Pentru a demonstra această proprietate, ne bazăm pe o teoremă din Geometrie care se enunță așa:

Secțiunea antiparalelă a unui con oblic cu bază circulară este un cerc. - Fie SAB planul



principal al unui con oblic, a cărui bază circulară este AB , și fie $A'B'$ secțiunea antiparalelă, determinată de intersecția cu o sferă O , așa că avem:

$$\angle SB'A' = \angle SAB.$$

Să demonstrăm că această secțiune e circulară.

Să considerăm un punct

M pe circumferința acestei secțiuni și prin acest punct să ducem un plan paralel cu baza, ceea ce ne dă secțiunea circulară CD , a căreia intersecție cu $A'B'$ este dreapta MPP' . Dacă considerăm pe MP în planul secțiunii circulare CD , avem relațiunea:

$$MP^2 = PC \times PD \dots (1)$$

Însă triunghiurile $A'PC$ și $B'PD$ sunt asemenea și ne dau: $\frac{A'P}{PC} = \frac{PD}{PB'}$ de unde: $A'P \times PB' = PC \times PD$

Înlocuind această valoare a produsului $PC \times CD$ în relațiunea (1) vom avea:

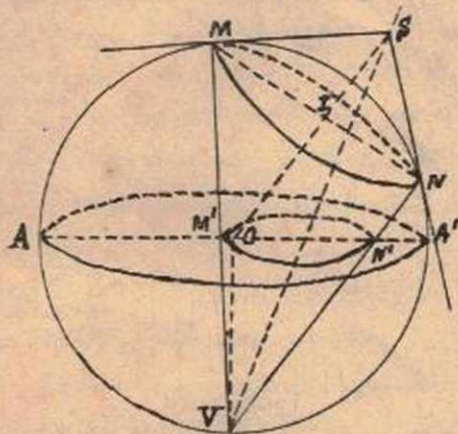
$$MP^2 = A'P \times PB'.$$

Deci: Secțiunea $A'B'$ este circulară.

- Să demonstrăm acum proprietatea anunțată.

Să considerăm pe sfera de proiecție cercul MN

pe care vom a-l proiecta. Dacă V este punctul de vedere și I centrul cercului MN , planul tabloului trecând prin punctele V și I , va fi planul principal al conului VMN format de dreptele ce servesc a proiecta punctele M și N și va da cu planul cercului MN intersecția MIN , care este un diametru al cercului.



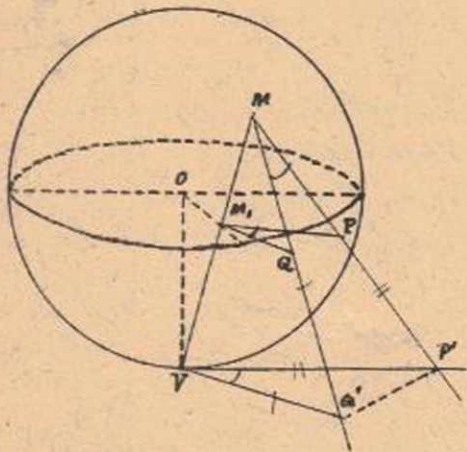
Perspectivile punctelor M și N pe planul de proiectie AA' vor fi punctele M' și N' , așezate pe diametrul AA' al cercului de proiectie, care e perpendicular pe OV . - Secțiunea $M'N'$ considerată în conul VMN este antiparalelă față cu baza circulară MN a conului, căci unghiurile VMN și $M'N'V$ sunt egale, având aceeași măsură: cel întâi jumătatea arcului $VA'N$, iar al doilea jumătatea sumei arcurilor cuprinse între laturile sale: $\frac{VA + A'N}{2}$. Inșă $VA = VA'$, deci avem ca măsură:

$$\frac{VA^2 + A'N^2}{2} = \frac{VN^2}{2}$$

Inșă secțiunea $M'N'$ este proiectia cercului MN , deci secțiunea $M'N'$ fiind circulară, urmează că:

Proiectia Stereografică a unui cerc e un cerc.

II. Proiecțiile Stereografice a două curbe, care se întâlnesc pe Sfera de proiecție. Se face după același unghi ca și curbele. — Fie M punctul de inter-



secție a două curbe pe Sfera de proiecție și MP și MQ tangentele la aceste două curbe în punctul M . Proiecțiile lor sunt: M, P și M, Q , care întâlnesc tangentele în P și Q .

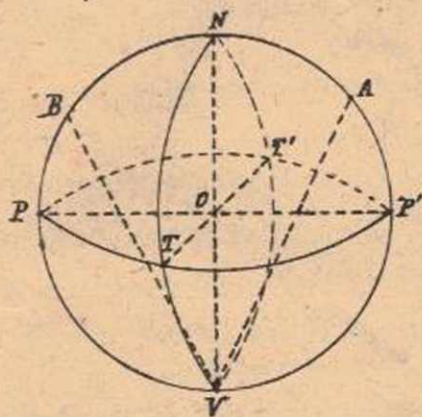
Planul tangent la Sferă în punctul V este atins de prelungirile

tangentelor în P și Q ; și fiind că planul tangent în V este paralel cu planul de proiecție, dreptele VP' și VQ' sunt paralele cu proiecțiile M, P și M, Q . Triunghiurile $P'MQ'$ și $P'VQ'$ au laturile lor egale, căci $P'Q'$ e comun și $P'M = P'V$ cu $Q'M = Q'V$, ca tangente duse din același punct exterior la Sferă. Deci triunghiurile sunt egale și au unghiurile lor egale, și deci:

$$\angle P'MQ' = \angle P'VQ' = \angle PMQ.$$

Să examinăm acum cum se obține proiecția diverselor cercuri, care se pot găsi pe Sferă. — Ori ce cerc mare a cărui plan e perpendicular

pe planul de proiectie se proiectează după diametrul corespunzător al cercului de proiectie. Aşa: cercul $NPVP'$ se proiectează după

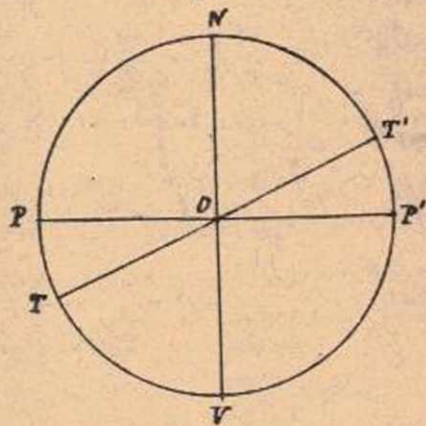


diametrul POP' şi cercul $NTVT'$ după diametrul TOT' .

În adevăr: cercul $NPVP'$, întâlnind cercul de proiectie în P şi P' , aceste puncte vor fi propriile lor proiec-
turi: toate punctele inter-
mediare între P şi P' de pe
cerc, precum: $A, B, \dots$ se vor

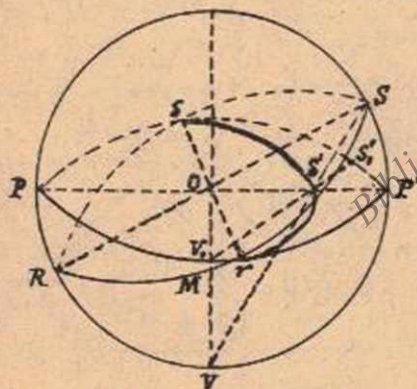
proiecta pe diametrul POP' între P şi P' în $a, b, \dots$.
Cercul $NPVP'$, care este în planul figurii, se nu-
meşte: Cerc de Origine.

Observăm că: unghiul pla-
nurilor $NPVP'$ şi $NTVT'$,
ambele perpendiculare
pe planul de proiectie
este măsurat prin un-
ghiul plan POT . Aceas-
ta ne da mijlocul de a
construi proiectia unui
cerc mare, perpendicular
pe planul de proiectie, când cunoaştem unghiul
ce acest cerc face cu planul cercului de origine.
Dacă presupunem că unghiul $POT = 35^\circ$, luăm



cercul de proiectie, ducem diametrele PP' și RR' perpendiculare între ele, cel întâi fiind proiectia cercului de origină; apoi plecând din P spre R , luăm arcul $PT = 35^\circ$ și ducem diametrul TOT' , care va reprezenta proiectia cercului mare $NTVT'$. —

Sa determinăm acum: Proiectia unui cerc mare, care, nefiind perpendicular pe planul de proiectie, este normal planului cercului de origină. Fie de proiectat cercul RMS , a cărui diametru este RS și intersecția cu planul de proiectie este dreapta TS . —



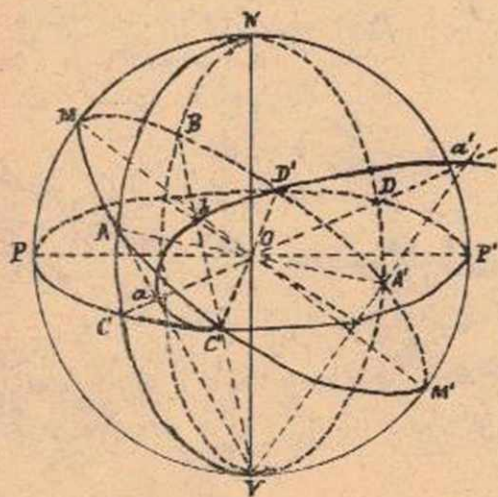
Punctele r și s reprezintă propria lor proiectie. Pentru a avea proiectia Semicercului rSs observăm că, porțiunea OS a diametrului reprezintă intersecția planului cercului de origină cu planul cercului RMS .

și fiind că O este propria Sa proiectie, proiectia lui OS trebuie să fie OP' . Ne rămâne să găsim proiectia punctului S . Pentru aceasta e de ajuns să-i determinăm perspectiva, unind punctul S cu punctul de vedere V , ceea ce ne dă cu OP' intersecția S' . — Deci: proiectia lui OS va fi OS' . — Având cele trei puncte: r, S', s , ducem

perpendiculară: PP' și VV' . -- Plecând din P' , luăm spre V un arc $P'S_1 = P'S$, ceea ce ne dă punctul S_1 ; ducem diametrul S_1OR_1 , și apoi pe VO diametrul perpendicular, care reprezintă intersecția cercului RMS cu planul de proiectie: deci punctele r și s aparțin proiectiei cercului RMS . Ne trebuie încă proiectia punctului S , pe care o putem obține ușor unind pe S_1 cu punctul de vedere V' , ceea ce ne dă cu OP' intersecția S' care este proiectia lui S . -- Prin r , S' și s facem să treacă un cerc mare, care reprezintă proiectia lui RMS . --

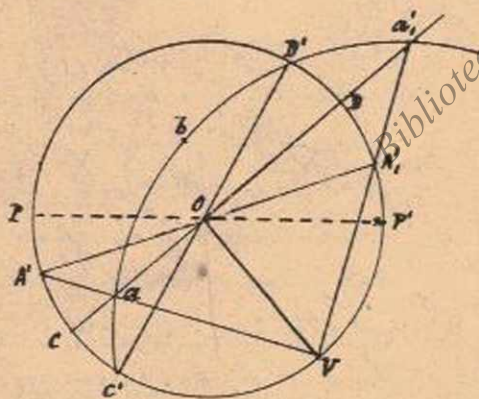
Ne rămâne acum de făcut câteva aplicațiuni.

I. -- Să considerăm pe sfera de proiectie un cerc mare $MAC'M'D'B$, trecând prin două



puncte A și B , a căror perspective a și b sunt cunoscute. Se cere a construi proiectia acestui cerc mare. Pentru aceasta e de ajuns a determina perspectiva unui al treilea punct al cercului, pentru care se ia de ordinărie opusul unuia din

punctele date, - A' opusul lui A. - Pentru a găsi acest punct e de ajuns a uni pe A cu O și a prelungi dreapta AO până la întâlnirea în A' cu cercul NACVD. - Unind V cu A', prelungim această dreaptă până la întâlnirea în a' cu prelungirea lui CO, ceea ce ne dă în a' perspectiva lui A'; - ea se află în afara de sferă de proiectie, însă în planul de proiectie. Prin a, b și a' facem să treacă un cerc mare care reprezintă proiectia cercului mare ce trece prin A și B. - Pentru a construi această proiectie procedăm așa:

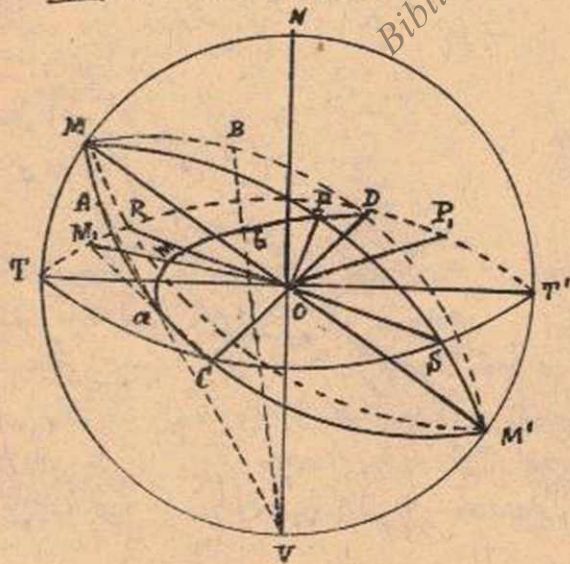


5. Fie $\underline{a}$ și $\underline{b}$ perspectivele date; pentru a găsi perspectiva lui A' , unim $\underline{a}$ cu $\underline{O}$ și prelungim până la întâlnirea în C și D cu circumferința cercului de proiecție: ea reprezintă proiecția cercului $NACVD$ care trece prin A' și O .

Sul său A' . Dacă rabatem acel cerc în jurul lui CD , punctul de vedere vine la extremitatea diametrului normal pe CD : în proiectie vine în V . Dacă unim pe V cu a și prelungim dreapta

până în A' , acest punct reprezintă rabaterea lui A . Unind A' cu O și prelungind această dreaptă, obținem cu circumferența cercului de proiecție intersecția A'' , care este rabaterea lui A' opusul lui A . Pentru a avea perspectiva acestui punct este de ajuns de a-l uni cu punctul de vedere V , și a prelungi dreapta VA'' , până la întâlnirea sa cu dreapta CO prelungită, în punctul α' . Prin punctele α , β , și α' , facem să treacă un cerc mare, care determină punctele C' și D' pe circumferința cercului de proiecție, puncte diametral opuse. Cercul $C'a b D'$ reprezintă proiecția cercului mare, ce trece prin A și B . — — —

II. — S'a arătat că: dacă mai multe fete



sunt în Zonă, poartă acestor fete sunt situați pe același cerc mare, numit Cerc de Zonă. Fiind dat proiecțiunea unui Cerc mare de Zonă, Să determinăm proiecția polului Zonă, adică a punctului în care axa de Zonă corespun-

valoare, determinăm mai întâi proiectia polului p a cercului $CaB'D$, apoi unim aceasta proiectie cu a și b și prelungim dreptele până la întâlnirea în A și B cu circumferența cercului de proiectie. Arcul $ARMB$ reprezintă adevărată mărimea a arcului, a cărui proiectie este $a'b'$.

Capitol III.

Studiul sistemelor cristaline.

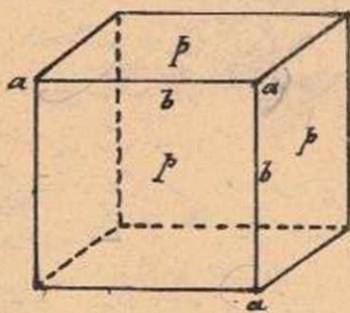
După cum am spus deja, vom studia sistemele cristaline comparativ în toate sistemele cristalografice, a căror principiu au fost studiate în cele precedente. Vom începe cu sistemul lui Levy, care este cea mai simplă și se adresează de a dreptul la corpuri care există în natură. Vom trece apoi la sistemul lui Naumann, care cere a ne închidem sistemul ideal de axe, pe care se bazează toată construcția cristalină. Vom fini cu sistemul lui Miller, care tinde a se generaliza din ce în ce mai mult. Vom cauta a prezenta proiectiunile formelor cristaline sub o formă cât mai ușoară de înțeles, cu atât mai

mult cã ele servesc la calculele cristalografice.

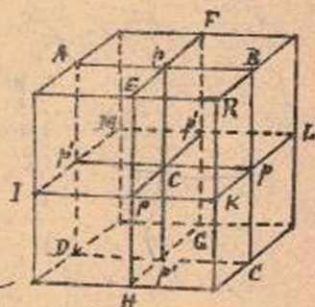
Vom admite 7 sisteme cristaline, considerãnd sistemul romboedric diferit de sistemul hexagonal, cu toate cã putem trece a sa usor de la simetria senarã la cea ternarã si viceversa. Ca aplicatiune vom studia formele compuse la fiecare sistem cristalin. —

I Sistemul cubic.

Dupã Levy, forma primitivã a acestui sistem este: Cubul sau Hexaedrul. El are: 6 fețe care



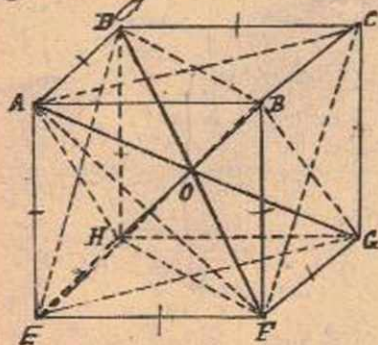
sunt miste
notate egale
si care se
notează p ;
apoi 8 un-
ghiuri solide
egale, forma-
te de unghiuri



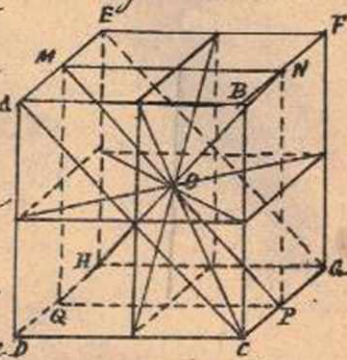
diedre drepte, care sunt notate a ; in fine are 12 muchi idontice, corespunzind la diedre drepte, si care sunt notate b . —

Dacã prin mijlocul muchilor dispuse in acelaș mod facem sã treacã planurile ABCDEFGH, si IKLM, aceste planuri vor fi, fiecare paralel

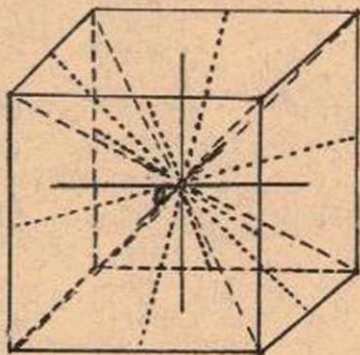
cu una din cele trei fețe ale cubului care formează unghiul Solid R și vor determina prin intersecția lor trei



drepte pp' , care sunt egale și dreptunghiulare și care unesc mijlocurile fețelor opuse.



Aceste trei drepte sunt axe de Simetrie, și fiind că trebuie să întoarcem Cubul în jurul uneia din ele de $\frac{360^\circ}{4} = 90^\circ$ pentru a se prezenta cu același aspect, axele vor fi de Simetrie cvaternară. Deci: Cubul are trei axe de Simetrie cvaternară din care cauza Bravais a numit Sistemul cubic: Sistemul Tercvaternar. — — —



Dacă prin diagonalele a două fețe opuse a cubului și prin muchiile care le corespund facem să treacă planurile ACEG, BDHF, etc. aceste planuri dau 4 intersecții care sunt diagonalele cubului AG, DF, BH și CE; aceste drepte sunt axe de

Simetrie ternară, căci trebuie să întoarcem

cristalul de $\frac{360^\circ}{3} = 120^\circ$ în jurul uneia din aceste axe pentru ca Solidul Să se prezinte cu același aspect. — În fine: dacă prin muchile opuse AE și CG, EF și DC etc ducem planuri, ele vor întâlni planurile MPNQ etc, care ne au servit a determina axele craternare, și vor da intersecțiile: MP, NQ etc, care unesc mijlocurile muchilor opuse și care sunt axe de simetrie binară, căci trebuie să învârtim cubul de $\frac{360^\circ}{2} = 180^\circ$ în jurul uneia din aceste axe.

2 pentru ca el Să se prezinte cu același aspect. — Există 6 de aceste axe. —

Constatăm de asemenea că toate axele: craternare, ternare și binare se întâlnesc într'un punct comun O, care este Centrul de Simetrie a Cubului. — —

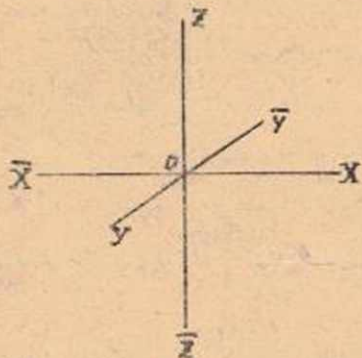
Planurile: ABCD, EFGH etc. care ne-au dat prin intersecția lor axele craternare, sunt perpendiculare fiecare pe una din aceste axe: vom avea dar: trei planuri de simetrie craternară. De asemenea: planurile ACE, ABHG etc sunt perpendiculare fiecare pe o axă de simetrie binară. Vom avea dară: sase planuri de simetrie binară. — Nu există planuri de simetrie ternară. — — —

Bravais reprezintă în rezumat Simetria Sis-

temului cubic prin: $3L^2, 4L^2, 6L^2, C, 3P^2$ și $6P^2$.

Notatiunea cubului după Sevy este: $\underline{p}$.

După Naumann, pentru a forma Cubul, ple-
căm de la cele trei axe
dreptunghiulare a sis-
temului Cubic, notate:



$\bar{X}\bar{X}, \bar{Y}\bar{Y}, \bar{Z}\bar{Z}$, care se tăc
în O , origina axelor.-
Porțiunile Ox, Oy, Oz
sunt pozitive, iar pre-
lungirile lor $O\bar{x}, O\bar{y},$
 $O\bar{z}$ sunt negative.-

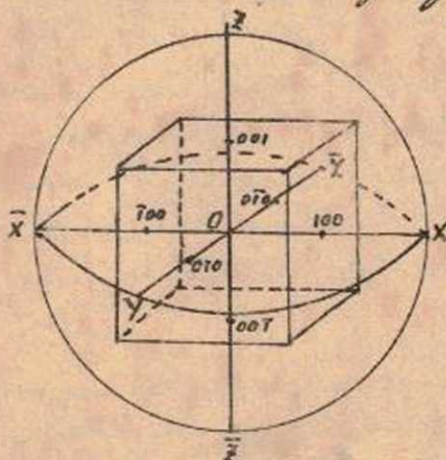
Parametrul corespunzător acestor axe este: $\underline{a}$.
Planurile care vor forma Cubul vor fi aplicate
asa, ca să treacă prin extremitatea pozitivă
și să fie paralele cu planurile celorlalte două
axe. Asa: planul trecând prin extremita-
tatea X a axei Ox , va fi paralel cu planul
 ZY . Raportul parametric după Weiss va fi,
pentru această față:

$$a : \infty a : \infty a$$

iar notatiunea după Naumann: $\infty 0 \infty$.

Pentru o' altă față, precum ar fi aceea ce trece
prin extremitatea negativă $\bar{z}$ a axei $O\bar{z}$,
raportul parametric va fi: $\infty a : \infty a : \bar{a}$, cea

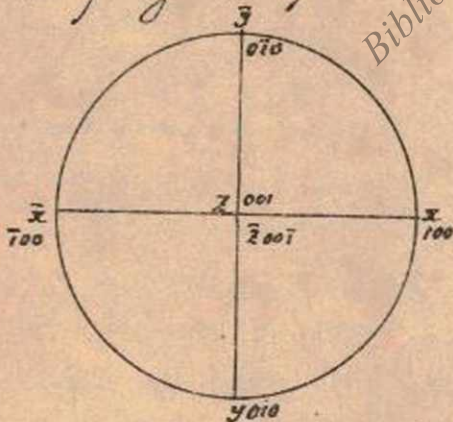
Pentru a avea proiecțiunea polilor fetelor cubu-
lui, luăm sfera de proiecție



și înscriem în ea un cub
asa ca, cele trei axe coor-
dinate să coincidă cu axele
de coordonate, iar centrul
sferei și prin urmare ori-
gina axelor să coincidă
cu centrul cristalinului.

Este ușor de văzut că:
normalele duse din cen-
trul sferei pe fețele cubu-
lui

se confundă cu axele, așa că poli acestor
fețe vor fi tocmai extremitățile: $x, y, z, \bar{x}, \bar{y}, \bar{z}$
a celor trei axe de coordonate. Luând ca plan
de proiecție planul cercului mare orizontal,



care trece prin axele: $x\bar{x}$,
și $y\bar{y}$, iar punctul de
vedere fiind în $\bar{Z}$, pro-
iecțiunile polilor fetelor
cubului vor fi:

Polul feței (100) în... x ,

" " ($\bar{1}00$) " ... $\bar{x}$

" " (010) " ... y

" " (0 $\bar{1}0$) " ... $\bar{y}$

" fețelor (001) și (00 $\bar{1}$) " ... z

Știm că: axa $Z\bar{Z}$ fiind perpendiculară pe pla-
nul de proiecție, poli fetelor aplicate la

extremitățile Sale, se vor proiecta în Z. ---

După Levy, toate formele cristaline ale sistemului cubic, se pot deduce din cub prin truncheturi, și după cum se modifică toate elementele simetrice sau numari simetrice din ele, obținem: 1^o Formele Holodrice sau 2^o Formele Hemidrice. ---

I. Formele Holodrice.

Formele holodrice ale sistemului Cubic se deduc din Cub prin două feluri de modificări: A) Modificări pe unghiuri, și B) Modificări pe muchi. ---

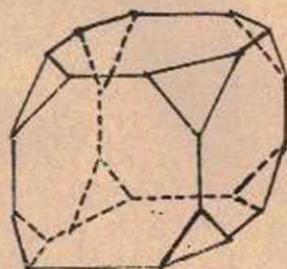
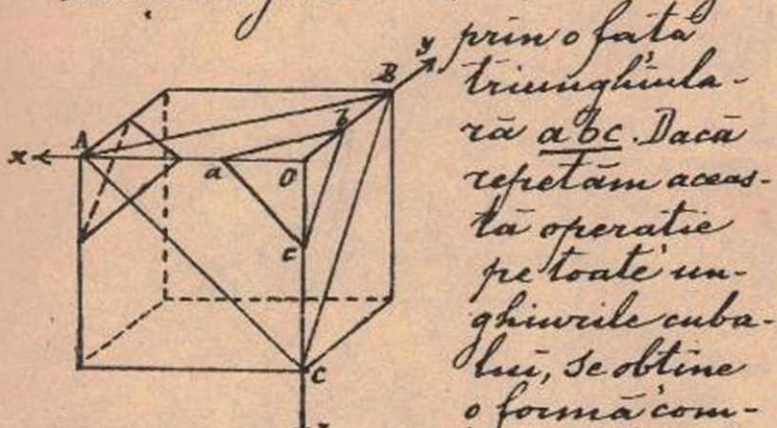
A. Modificări pe unghiuri

Modificările pe unghiuri se obțin înlocuind aceste unghiuri prin fețe, care să ier pe cele trei muchi, ce formează acel unghi, distanțe variabile: Vor rezulta prin urmare mai multe forme:

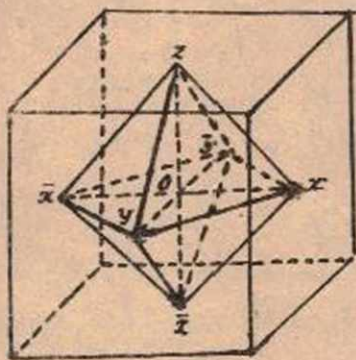
Octaedrul.

Să considerăm unghiul O al cubului și cele trei muchi Ox, Oy, Oz care-l compun. Aceste muchi sunt egale și lungimea lor comună se însumează cu 6. Să presupunem că înlocuim acest unghi prin o față, care ia pe cele trei muchi dis-

tantele egale: Oa, Ob, Oc . Unghiul va fi înlocuit



prin o fată
triunghiula-
ră $a b c$. Dacă
repetăm aceas-
tă operație
pe toate un-
ghiurile cubu-
lui, se obține
o formă com-
pusă, care reprezintă cubul cu unghiurile înlocuite
prin câte o fată. - Observăm că, intersecțiile
 ab, ac, bc cu fețele cubului sunt paralele cu dia-
gonalele AB, AC, BC a acestor fețe. Dacă înaintăm
cu truncheturile către centrul cristallului, până
ce fețele modificătoare ieș pe muchii distanțe
egale cu lungimea totală a muchilor, intersec-
țiile cu fețele cubului se confun-



da cu diagonalele lor, iar din
intersecția celor două fețe
ce înlocuiesc unghiurile, va
rezulta un solid cu opt fețe
care se numește: Octaedru.
Notatiunea fetelor acestui
solid va fi: $b^{\frac{1}{2}} b^{\frac{1}{2}} b^{\frac{1}{2}}$
și fiind că fețele înlocuiesc
unghiul α vom avea sim-

bolul: $\alpha^{\frac{1}{2} : \frac{1}{2}} = \underline{\alpha}^1$ — — —

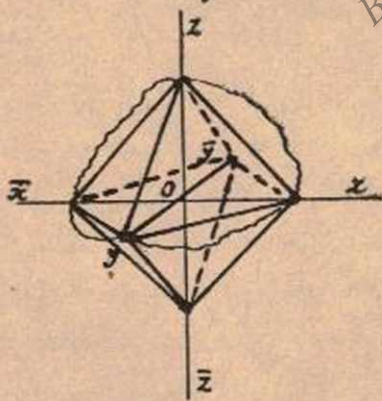
Aceasta este notațiunea și a unei fete precum și a solidului întreg. — —

Forma fetelor Octaedrului este aceea a unor triunghiuri ecvilaterale, căci avem: $zx = zy = z\bar{x}$ ca oblice egal departate de piciorul Oz al perpendiculararelor $Ox, O\bar{x}, Oy, \dots$ —

Octaedrul are deci următoarele elemente: 8 fețe triunghiuri ecvilaterale egale; 12 muchii egale care unesc extremitățile axelor coaternare și 6 unghiuri solide, formate din 4 muchii egale. — —

Observăm că: axele coaternare ale cubului reunesce cele 6 unghiuri ale octaedrului două câte două; axele ternare reunesce centrele fetelor opuse, iar axele binare reunesce muchiile opuse. — —

— După Naumann, pentru a obține Octaedrul, trebuie să aplicăm planuri, care să atingă cele trei axe la extremități. Să ne închipuim un plan care se întinde la infinit, dar care atinge axele la extremitățile lor x, y, z : acest plan va servi a forma fata aplicată



pe aceste axe, prin întâlnirea cu planurile aplicate pe extremitățile celor alte axe. Așa: planul

ce trece prin extremitățile $\underline{x}, \underline{y}$ și $\underline{z}$, are cu planul $\underline{xyz}$ două puncte comune $\underline{x}$ și $\underline{z}$, așa că, intersecția celor două planuri, va fi dreapta $\underline{xz}$; de asemenea cu planul ce trece prin extremitățile $\underline{y}, \underline{z}$ și $\underline{x}$, va avea intersecția $\underline{zy}$, iar cu acel ce trece prin $\underline{x}, \underline{y}, \underline{z}$ va avea intersecția $\underline{xy}$. Aceste trei intersecții determină o față triunghiulară $\underline{xyz}$. —

Raportul parametric ce determină poziția fețelor Octaedrului fiind: $a : a : a$ notatiunea după Naumann va fi: O . — —

— Notatiunea fețelor Octaedrului în indici este foarte simplă. Pentru fața aplicată pe extremitățile $\underline{x}, \underline{y}, \underline{z}$, avem raportul: $a : a : a$ de unde parametrele: $1 : 1 : 1$, a căror inverse dau notatiunea în indici: (111) . — —

Pentru celelalte fețe ale Octaedrului vom avea notatiunile: $(\bar{1}11), (1\bar{1}1), (11\bar{1}), (\bar{1}\bar{1}1), (1\bar{1}\bar{1}), (\bar{1}1\bar{1}), (\bar{1}\bar{1}\bar{1})$. —

— Pentru a avea proiecțiunea polilor fețelor Octaedrului, vom procedea astfel:

Octaedrul fiind înscris în sfera de proiecție să scoborâm din centrul ei, care e și centrul Cristalului, normala Od pe fața $\underline{xyz}$ a cristalului și să o prelungim până ce atinge sfera în punctul A , care este polul feței. — Pentru a construi proiecțiunea acestui pol, observăm că: punctul

Dacă ducem un cerc mare prin x și $\bar{x}$, el va reprezenta proiecția cercului de 45° între x și y ; el atinge diametrul de 45° între y și $\bar{x}$ în punctul a' , care va fi proiecția polului fetelor xyz a Octaedrului. Deci: polii fetelor Octaedrului au proiecțiile lor la intersecția cercurilor mari de 45° . - Vom avea succesiv în a' a'' a''' proiecțiile polilor fetelor: (III) , (III) și (III) . - Pentru a avea proiecția polilor fetelor ce se află sub planul de proiecție, constatăm că: ele ating axa $x\bar{x}'$ la extremitatea sa negativă; proiecțiunile lor se vor confunda cu acele ale fetelor Superioare, iar notațiunile lor vor fi aceleasi cu diferența că: ultimii indici a fiecărei notațiuni vor fi negativi. - Vom avea astfel notațiunile: (III) , (III) , (III) și (III) .

Icositetraedrul sau Trapezocedrul.

Pentru a obține acest solid după Sevy, vom înlocui fiecare din unghiurile Solide ale Cubului prin fete care să aibă pe muchiile corespundente: două distanțe egale cu 1 și a treia mai mică, egală cu $\frac{1}{2}$. Așa: fața abc ia distanțele: $Oa = Ob = 1$ și $Oc = \frac{1}{2}$. Fața va fi notată: $b'b'b''$. Si fiind că ea înlocuiește

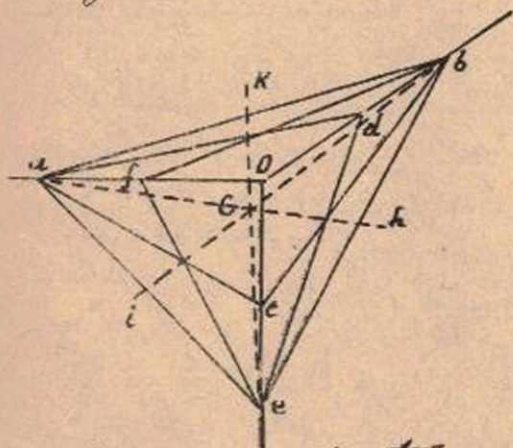
unghiul α notativmca va deveni: $\alpha^{\frac{1}{m}} = \frac{\alpha}{m}$.

Pentru a obține aceste notativmuri dividem exponentul care e reprezentat de două ori, prin acel ce nu e de cât odată. —

Insa fiind ca în O vine o axă ternară, trebuie încă două fete, care să iie distanțe asemenea pe fiecare muchie. Astfel în vom avea planurile: ade și bef , care ieu succesiv distanțele: $Oa = 1$, $Od = \frac{1}{m}$, $Oe = 1$ și $Ob = 1$, $Oe = 1$, $Of = \frac{1}{m}$. Aceste trei planuri se taie două câte două, după dreptele: ah , bi și ek , care la rândul lor se încrucișază în punctul C , așa că, unghiul O va fi înlocuit prin un vârf obtuz format de cele trei fete: Cae , $Caeb$, Cbe . —

Dacă modificăm în acelaș mod, cele l-alte unghiuri a cubului și înaintăm cu truncheturile, până ce facem să

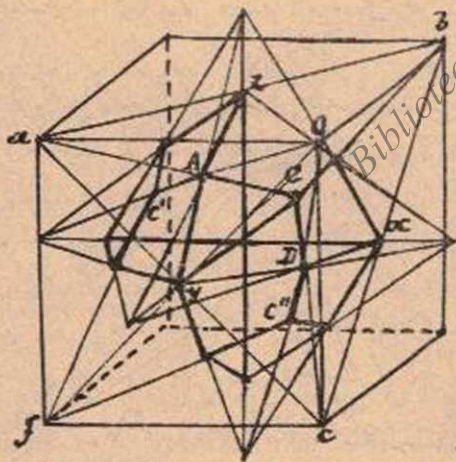
dispară fetele cubului, vom obține un solid care va avea: $3 \times 8 = 24$ fete și care se numește Icositetraedru sau Trapezocedru, fiind că forma fetelor este așa a unor trapeze simetrice. În adevăr:



Observăm că intersecțiile fetelor modificatoare

cu fețele cubului sunt paralele cu diagonalele acestor fețe. Să ne închipuim că aceste modifi-
ficate au avansat până la trecerea lor prin
aceste diagonale, și să considerăm vârfurile
obtuze C, C', C'' . Fețele care formează vârful C
vor deveni: $Cab, 'Cac, lbc$; ele se vor întâlni
succesiv cu fețele care formează vârfurile C'
și C'' . Așa făcând Cac se întâlnește cu $C'O$ după
dreapta yA și cu $C''O$ după yD ; și atunci forma
definitivă a feței va fi: $CAyD$, care este un tra-
pez simetric. —

Solidul are dară următoarele elemente:



24 de fețe, care sunt to-
te trapeze simetrice;
48 muchii de 2 specii:
24 muchii mai lungi
 X și 24 muchii mai scur-
te V . Cele întâi unesc
extremitățile axelor
craternare cu a celor
binare pe când cele l-
alte unesc axele ternare
cu axele binare. —

Unghiurile Solide în număr de 26 sunt de
trei specii: 6 unghiuri p compuse din câte
4 muchii mari și corespunzând extremităților

axelor coaternare; 12 unghiuri simetrice A. formate de două muchii mari și două mici, corespunzând extremităților axelor binare; și 8 unghiuri O, formate de câte 3 muchii mici, corespunzând extremităților axelor ternare. —

Am văzut că notațiunea Trapezocedruului este: $\underline{a}^m$, m fiind > 1 . Trapezocedrele cele mai frecvente sunt:

$$\underline{b}^2 \underline{b}^1 \underline{b}^{\frac{2}{3}} \text{ sau } \underline{a}^{\frac{2}{3}}$$

$$\underline{b}^1 \underline{b}^1 \underline{b}^{\frac{1}{2}} \quad " \quad \underline{a}^2$$

$$\underline{b}^1 \underline{b}^1 \underline{b}^{\frac{1}{3}} \quad " \quad \underline{a}^3$$

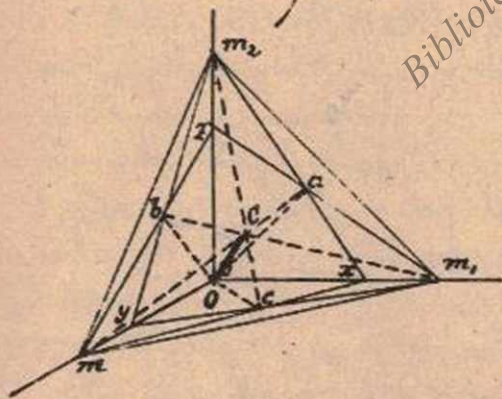
Este evident că: un trapezocedru va fi cu atât mai obtuz cu cât exponentul lui $\underline{a}$ va fi mai mic. Așa: $\underline{a}^2$ e mai obtuz decât $\underline{a}^3$. —

— După Naumann, raportul, rarametric corespunzător Trapezocedruului este: $a : ma : ma$ sau $\frac{a}{m} : a : a$ cu $m > 1$.

Pentru a obține solidul vom considera axele și vom aplica fețe care să întâlnească o axă la extremitate, iar pe cele-lalte la distanțe $m > 1$. Așa față $m x m_1$ ia

distanțele Om și Om_1 mai mari ca 1. și $Ox = 1$.

Dacă construim în același mod fețele ym, m_1 și zm, m_1 , aceste două din urmă vor întâlni pe cea



d'întâi după dreptele: m, c și ma , iar între ele vor da intersecția m, b . În același timp cele trei intersecții se fac în punctul C , ceea ce determină cele trei fete: xac , ybc , zab , cuprinsă în conturul $xarbyc$. - Este ușor de văzut că fetele sunt niste trapeze, căci: $Ca = Cb = Cc$ și: $xa = ax = xc = cy = yb = bz$. În adevăr: Ca și Cc sunt egale ca având: $OC = OC$, apoi $Oa = Oc$ ca axe binare și unghiurile: $OC = OC$, ca unghiurile axelor binare cu axa ternară; deci triunghiurile fiind egale trebuie să aibă: $Ca = Cc$. Găsim de asemenea: $Cc = Cb$; deci: $Ca = Cb = Cc$. De asemenea, considerând triunghiurile xOa și xOa , ele sunt egale căci: $Oa = Oa$, $Ox = Oz$ și $xOa = xOa$, ca unghiurile axelor binare cu axa coaternară; deci am: $xa = xa$. Triunghiurile xOb și xOb sunt egale având $Ox = Oz$, $Oa = Ob$ ca axe binare și unghiurile $xOb = xOb$, ca unghiurile axei coaternare cu axele binare. Deci: $xa = xb$. În definiție avem: $xa = xa: xb = \dots$

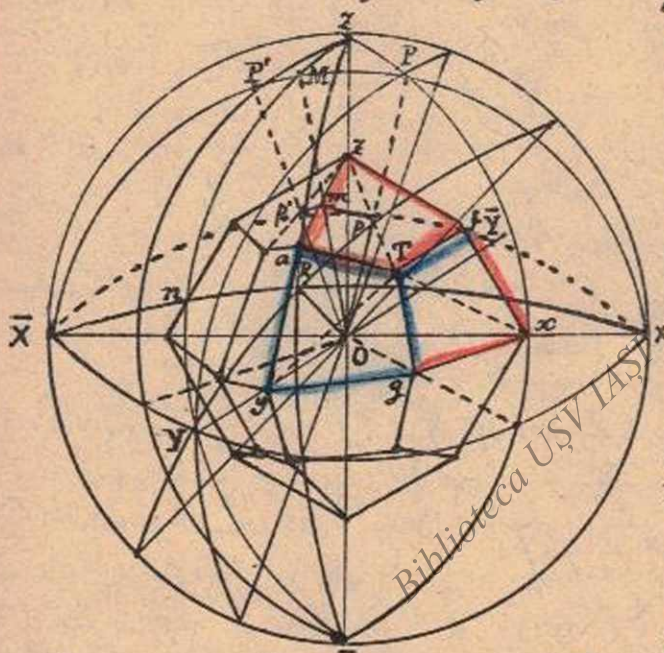
Raportul parametric corespunzător acestor forme fiind: $a: ma: ma$, notațiunea va fi: mOm . -

— Pentru a avea notația după Miller, luând fata reprezentată prin raportul parametric

$a : ma : ma$, vom avea în indici: $\frac{1}{1} : \frac{1}{m} : \frac{1}{m}$

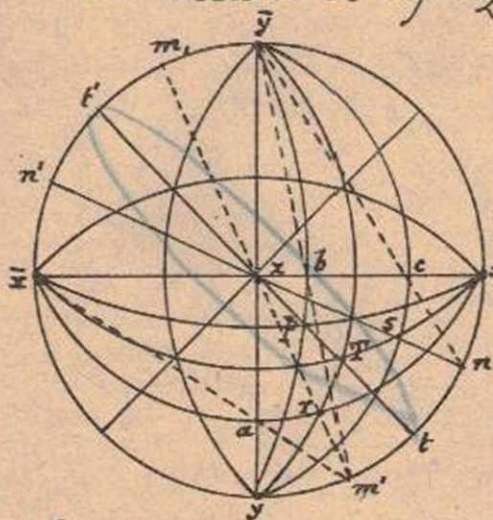
Sau: $m^2 m m$ sau: $(m 11)$. — —

— Pentru a face proiectia fetelor Trapezoe-



driului, să conside-
răm acest solid
înscris în sfera
de proiectiune și
să căutăm a de-
termina projec-
tia polilor fetelor:
 $z a T s$, $a T g y$ și $q T x$,
cuprinse între axe-
le: Ox , Oy , Oz . Ob-
servăm că, punc-
tul T fiind extre-
mitatea axei ter-
nare, prin acest
punct trec planu-

zile cercurilor mari de 45° între x și y , x și z ,
și y și z , și că aceste planuri taie fetele după
dreptele Tx , Ty , Tz . Însă, picioarele norma-
lelor scoborâte pe aceste trei fete, pentru a de-
termina polii, sunt așezate pe dreptele Tx , Ty ,
 Tz ; deci: proiectiunile acestor poli trebuie să
se găsească pe proiectiile celor trei cercuri ma-
ri de 45° între x și y , x și z , și y și z . — Vom
lua dar cercul de proiectie și după ce vom duce



diametrele care reprezintă axele, să construim mai întâi proiectiile cercurilor de 45° și care sunt: diametrul tt' și cercurile yTy , și xTx , care trec prin punctul T , care este proiectia polului fetei Octaedrului și în același timp a extremității axei ternare. Deci: poli celor trei fete trebuie să se proiecteze pe arcele Tx , Ty , Tz . —

Să considerăm mai întâi fața zaf : polul său P se găsește la intersecția a două cercuri mari: xPz care e de 45° și a cărei proiectie este tt' ; și cercul yPy , a cărei proiectiune trebuie să o căutăm. Să determinăm polul P' al fetei adiacente la muchia za și prin dreptele OP și OP' să ducem un plan, a căruia urme pe cele două fete vor fi dreptele: pm și $p'm$, iar pe sfera de proiectie, cercul mare: $xPMP'x$. —

În cadrilateralul $Op'm'p'$, unghiul m este suplimentul unghiului O . Deci: dacă cunoaștem valoarea diedrului za , care să fie: $131^\circ 48' 55''$, suplimentul său $48^\circ 11' 14''$ va reprezenta valoarea unghiului O , a celor două normale. Însă

planul xyz împarte aceste unghiuri în două părți egale, așa că, unghiul plan MOP , măsurat prin arcul MP , va avea ca valoare: $24^{\circ}5'37''$. — Dacă rabatăm cercul $xP\bar{x}$ în jurul lui $x\bar{x}$, este evident că, punctul M va veni în $\bar{y}$, iar P va căde pe circumferența cercului de proiectiune la distanța de $24^{\circ}5'37''$ de la $\bar{y}$ spre x , pe când punctul de vedere va veni în $\bar{y}$. —

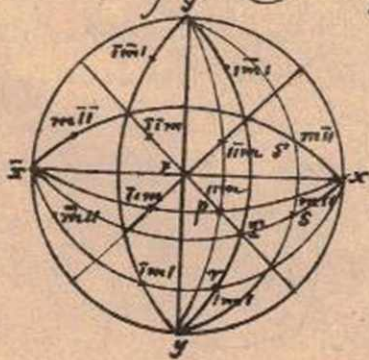
Atunci pe cercul de proiectie plecând de la $\bar{y}$ spre x , vom lua un arc $\bar{y}m' = 24^{\circ}5'37''$; punctul m' , care reprezintă poziția de rabatare a polului P , fiind unit cu punctul de vedere, care este în $\bar{y}$, da cu $x\bar{x}$ intersecția b . Cercul mare yby , reprezintă proiectia cercului $yP\bar{y}$; el întâlnește cercul bt în punctul p , care este proiectia polului P . — — —

Polul R al fetei $ayg\bar{t}$ se găsește la intersecția cercului $yR\bar{y}$ de 45° între x și $\bar{x}$, cu cercul $xR\bar{x}$, a cărui proiectie trebuie să a o căutam. Acest cerc fiind normal pe planul de proiectie, se va proiecta după un diametru. Fiind că diedrul ay are aceeași valoare ca și $\angle \alpha$, cercul $xR\bar{x}$ face cu planul xyz un unghi de $24^{\circ}5'37''$. El de ajuns dar de a uni pe m' cu $\bar{x}$ și de a prelunge în m_1 ; diametrul $m'x m_1$, care reprezintă proiectia lui $xR\bar{x}$, întâlnește cercul $y\bar{t}\bar{y}$ în punctul

r , care va fi proiectia polului R . —

De asemenea putem să ne servim de diedrul yz , care este egal cu ya ; în acest caz dacă ducem cercul $xR\bar{x}$, vom avea intersecția n cu $xy\bar{x}$; atunci yn reprezintă aceeași valoare ca și MP , adică: $24^{\circ}5'37''$. Rabatând cercul $ynzy$ în jurul lui yy spre x , punctul de vedere va veni în $\bar{x}$, și n la o distanță de $24^{\circ}5'37''$ spre x , pe circumferența cercului de proiectiune, deci în m' . — Unind acest punct cu punctul de vedere, se obține cu yy intersecția a ; cercul $xa\bar{x}$ reprezintă proiectia cercului $xR\bar{x}$, și intersecția r cu cercul $yz\bar{y}$, va fi proiectia lui R .

În același mod vom găsi că: proiectia S a polului S a fetei $gTfx$, se găsește la intersecția cercului $xT\bar{x}$ de 45° cu diametrul nn' , care face un unghi de $24^{\circ}5'37''$ cu cercul $xT\bar{x}$ și care reprezintă proiectia cercului $xS\bar{x}$. —



Pentru a scrie notațiunile în indice a tuturor polilor fetelor, observăm că este de ajuns a determina aceste notațiuni pentru fetele a căror poli se află în octantul xyz . Polul p

reprezintă fata care atinge axa de $\bar{z}$ la extremitate, deci notațiunea sa parametrică va fi: $ma : ma : a$, sau în indici: $(11m)$.

Pentru a scrie notațiunea celor l -alte fete, observăm că, în notațiunea generală, avem doi indici 1 și un indice m , care se referă la axa atinsă la extremitate. Servindu-ne de această observație vom scrie îndată notațiunile: $(1m1)$ pentru r și $(m11)$ pentru s . - Pentru a scrie notațiunile polilor care cad în cele l -alte Octante procedăm astfel: rabatem semicercul inferior în jurul lui $x\bar{x}$; atunci y vine în $\bar{y}$ și poli p, r, s , în p', r', s' , a căror notațiune se va obține schimbând indice, care corespunde lui y (cei al doilea) în negativ. Vom avea pentru $p': (1\bar{1}m)$, $r' (1\bar{m}1)$, și $s' (m\bar{1}1)$. Dacă mai rabatem semicercul din dreapta în jurul lui $y\bar{y}$, atunci x vine în $\bar{x}$; deci vom schimba cei întâi indici în negativ și vom avea:

$(\bar{1}\bar{m}1) (\bar{m}\bar{1}1) (\bar{1}\bar{1}m)$ și $(\bar{m}\bar{1}1) (\bar{1}\bar{1}m) (\bar{1}\bar{m}1)$. -

În fine, pentru a avea poli fetei de sub planul de proiectie, vom face indice corespunzător lui $\bar{z}$, adică pe cei din urmă, în negativ. - -

Pentru a pute face transformatiunea notatiunelor lui Levy în Naumann si Miller, ne putem servi de următoarele formule generale:

$$b' b' b' - a^{\frac{p}{q}} - \frac{p}{q} 0 \frac{p}{q} - a : a : \frac{q}{p} a - (p q q) . -$$

Pentru principalele Trapezoeдре vom avea:

$$b' b' b' - a^{\frac{2}{3}} - \frac{3}{2} 0 \frac{2}{3} - a : a : \frac{2}{3} a - (322) .$$

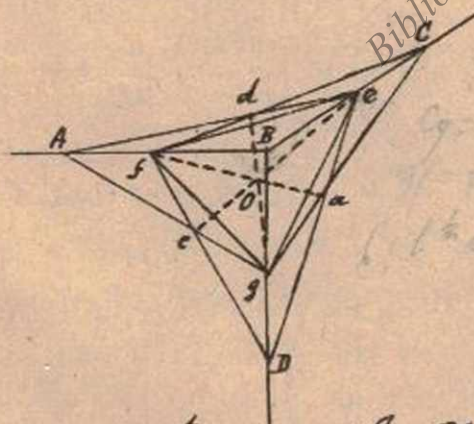
$$b' b' b' - a^2 - 2 0 2 - a : a : \frac{1}{2} a - (211) .$$

$$b' b' b' - a^3 - 3 0 3 - a : a : \frac{1}{3} a - (311) .$$

Trioctaedrul sau Octaedrul piramidat

Pentru a obtine acest solid după Levy, trebuie

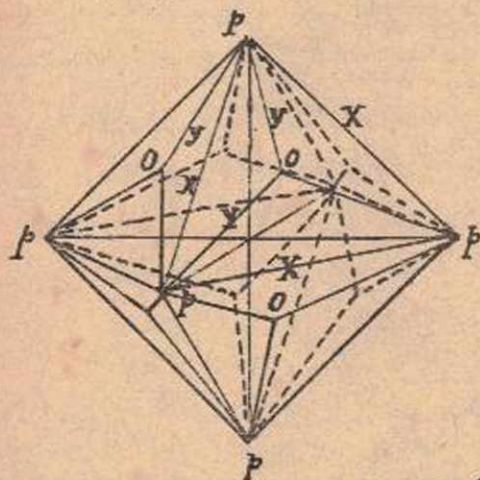
să înlocuim unghiurile solide ale cubului prin trei fețe, fiecare luând pe o muchie o distanță întreaga și pe cele l. al. te două distanțe egale cu $\frac{1}{m}$. Astfel în față Aegia distanțele: $BA = 1$. $Be = \frac{1}{m}$. $Bg = \frac{1}{m}$. - Notatia



parametrică va fi: $b' b' b' - a^{\frac{1}{m}}$ sau: $a^{\frac{1}{m}}$. -

Cele l. al. te două fețe Cfg și Dse se vor întâlni între ele și cu prima față și vor da intersecțiile: gd,

cc și af, a căror intersecție comună O va forma un vârf cu trei fețe, mai obtuz decât vârful B,



și a cărui fețe AdOc, CdOa și BaOc sunt dirijate către muchiile cubului. - Este evident că, dacă înlocuim toate unghiurile cubului prin câte trei fețe, în aceleași condițiuni ca și unghiul B,

vom avea un nou Solid care va avea: $3 \times 8 = 24$ fețe. Prin o construcție analoagă cu aceea ce am făcut la Trapezodru, putem arăta că: fețele Solidului sunt niste triunghiuri isoscele, reunite câte trei în jurul extremităților axelor ternare, așa ca Solidul va avea forma unui Octaedru a cărui fețe sunt acoperite cu câte o piramidă cu trei fețe triunghiulare, de unde numele de Octaedru piramidal sau Trioctaedru ce se dă acestui Solid. El are: 36 muchi de două specii: 12 muchi mai lungi X, reunind extremitățile axelor ternare și corespunzând cu muchiile Octaedrului, și 24 muchi mai scurți Y reunite câte trei

în jurul extremităților axelor ternare, pe care le unesc cu extremitățile axelor cvaternare. Unghiurile Solide, în număr de 14, Sunt de două specii: 6 unghiuri p formate de 4 muchii lungi alternând cu 4 muchii scurte, în jurul extremităților axelor cvaternare, și 8 unghiuri 0 formate de câte trei muchii scurte, reunite în jurul extremităților axelor ternare. —

Am văzut că notațiunea Trioctaedrului este: $\alpha^{\frac{1}{m}}$ cu $m > 1$. —

Principalele Trioctedre sunt:

$$\bar{6}^{\frac{1}{2}} \bar{6}^{\frac{1}{2}} \bar{6}^1 \text{ sau } \alpha^{\frac{1}{2}}$$

$$\bar{6}^{\frac{1}{3}} \bar{6}^{\frac{1}{3}} \bar{6}^1 \text{ sau } \alpha^{\frac{1}{3}}$$

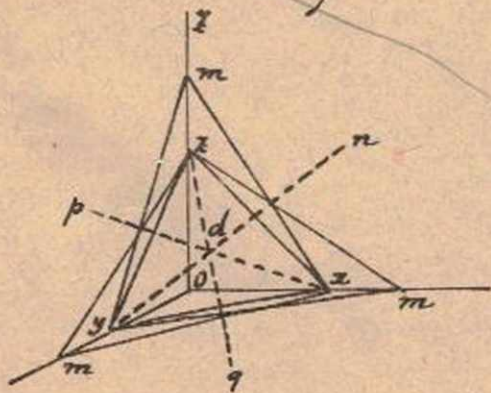
$$\bar{6}^{\frac{1}{3}} \bar{6}^{\frac{1}{3}} \bar{6}^{\frac{1}{2}} \text{ sau } \bar{6}^{\frac{2}{3}} \bar{6}^{\frac{2}{3}} \bar{6}^{\frac{1}{2}} \text{ sau } \alpha^{\frac{2}{3}}. — —$$

Observăm că: Trioctaedrul va fi mai obtuz, când $\frac{1}{m}$ va fi mai mare, adică m mai mic.

Asa: $\alpha^{\frac{1}{2}}$ va fi mai obtuz de cât $\alpha^{\frac{1}{3}}$. — —

— Dupa Naumann, raportul parametric corespunzător acestui Solid, pe care-l numim Triakisodăedru, este: $a : a : ma$. de unde notațiunea: $m O$. —

Pentru a obține acest Solid, va trebui să aplicăm planuri care să atingă

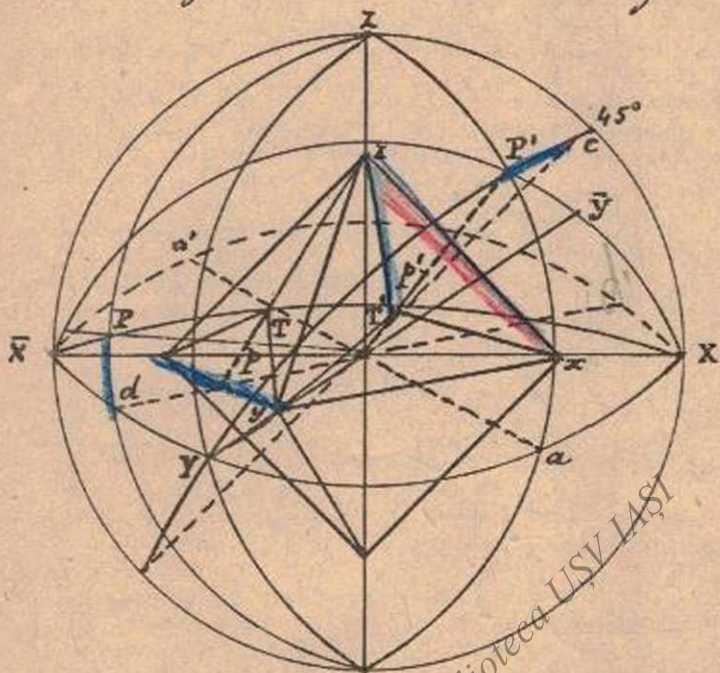


două axe la extremitate și pe a treia la o distantă m > 1. Așa: planul aplicat pe extremitățile x și y și tăind pe z la o distantă m , se întâlnește cu planul aplicat pe extremitățile x și z , după dreapta xp și cu planul aplicat pe z și y , după dreapta yn . Aceste două intersecții se tăie în punctul d , așa că fata aplicată pe x și y și atingând pe z la distantă m va fi: xyd . - În mod analog se obțin și celelalte fete: yzd și zxd , care sunt, după cum se poate ușor vede, niste triunghiuri isoscele, căci avem: $xd = yd = zd$, ca fiind $\frac{2}{3}$ din medianele triunghiului xyz . -

— Pentru a avea notațiunea după Miller observăm că: fata aplicată pe x și y , e reprezentată prin raportul parametric: $a : a : ma$, de unde în indici: $\frac{1}{1} : \frac{1}{1} : \frac{1}{m}$ sau: $(m m 1)$. -

— Proiecția polilor fetelor Trioctaedrului se obține astfel: Să considerăm Trioctaedrul înscris în sfera de proiecțiune; vedem că, prin muchile mici trec planurile de 45° între axe, și prin urmare polii fetelor cuprinsc între x, y, z se vor găsi pe cercurile mari de 45° la intersecția lor cu alte cercuri mari. Să consi-

derăm fața zxT' a căruia pol P' se găsește la intersecția cercurii $yP\bar{y}$ de 45° ,



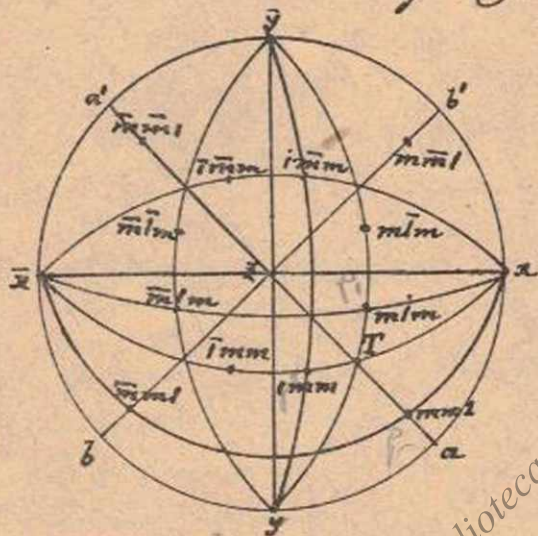
între z și x , cu cercul $xP'\bar{x}$, a căruia proiecție noi o căutăm. Diedrul zx fiind măsurat, să presupunem că am găsit: $121^\circ 3' 57''$; atunci unghiul normalilor la fețele ce formează acest diedru

va fi suplimentul de: $38^\circ 56' 3''$; și fiind că planul zx împarte în două părți egale unghiul normalilor, rezultă că, arcul $P'C$ va fi: $19^\circ 28' 1''$. Rotatând cercul $yP\bar{y}$ în jurul lui yy , punctul P' va cădea pe circumferința cercului de proiecție la o distanță de: $19^\circ 28' 1''$ de la x către y , pe când punctul de vedere va veni în x .

Vom avea dar a face construcția următoare: Luând cercul de proiecție, ducem mai întâi cercul $y\bar{y}$, proiecția cercului de 45° între x și z ; apoi plecând de la x , luăm $xm = 19^\circ 28' 1''$ și

cercului $xI\bar{x}$. În același mod vom pute obține proiectiunea polilor tuturor fetelor Trioctaedrului. — —

Pentru a avea pozițiunea proiectiunii polilor tuturor fetelor, precum și notatiunea lor, vom procedea ca și la Trapezocedru. Fata



proiectată în p' fiind aplicată pe extremitățile x și $\bar{x}$ și atingând pe y la distanța m , este notată $(m|m)$, deci valorile lui m corespund axelor atinse la extremitate.

Atunci pentru celelalte fete putem să scriem: $(m|m)$ pentru p , și $(\bar{m}|\bar{m})$ pentru p'' .

Remarcăm că, polii fetelor Trioctaedrului sunt proiectați ca și polii fetelor Trapezocedrului pe cercurile de 45° , dar nu între I și extremitățile axelor, dar între I și punctele unde diametrele de 45° ating cele trei cercuri principale: $xI\bar{x}$, $yI\bar{y}$, $xy\bar{x}$. — — —

Pentru transformarea notatiunilor Trioctaedrului

avem următoarele formule generale:

$$b^{\frac{1}{p}} b^{\frac{1}{p}} b^{\frac{1}{p}} = a^{\frac{q}{p}} = \frac{p}{q} O = a : \frac{q}{p} a : \frac{q}{p} a = (ppq). -$$

Pentru principalele Trioctaedre vom avea:

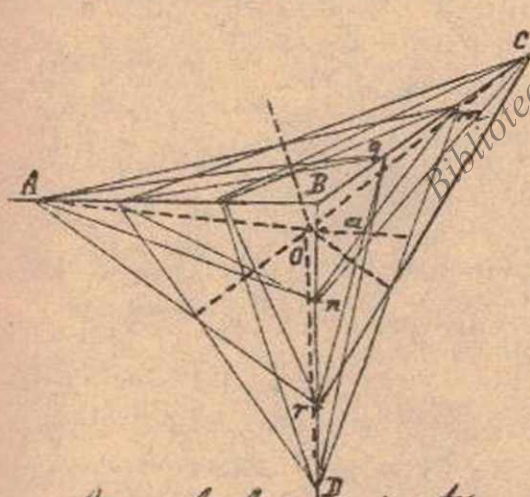
$$b^{\frac{1}{2}} b^{\frac{1}{2}} b^1 = a^{\frac{1}{2}} = 2O = a : \frac{1}{2} a : \frac{1}{2} a = (221). -$$

$$b^{\frac{1}{3}} b^{\frac{1}{3}} b^1 = a^{\frac{1}{3}} = 3O = a : \frac{1}{3} a : \frac{1}{3} a = (331). -$$

$$b^{\frac{2}{3}} b^{\frac{2}{3}} b^1 = a^{\frac{2}{3}} = \frac{3}{2} O = a : \frac{2}{3} a : \frac{2}{3} a = (332). -$$

IV Scelnoedrul sau Hexoctaedru.

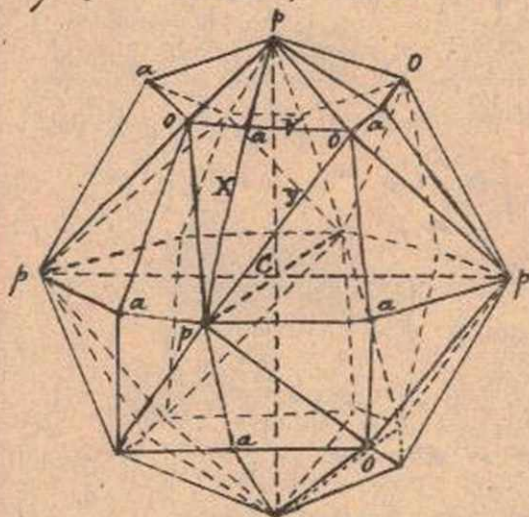
Pentru a deduce din Cub acest Solid, se înlo-



cu se înlocuiesc unghiurile solide prin fețe care au pe cele trei muchii, distanțe deosebite. - În acest caz, care este cel mai general, fiecare muchie e înlocuită prin două fețe, iar unghiul va fi înlocuit prin urmare prin șase fețe. - Așa,

planul A_{mn} interceptând distanțele: $AB=1$, $Bm=\frac{1}{m}$, $Bn=\frac{1}{n}$, cere un alt plan: Agr , care ia $AB=1$, $Bg=\frac{1}{n}$, $Br=\frac{1}{m}$. Ambele planuri se taie după dreapta Aa , iar muchia AB va fi înlocuită prin

fetele Ama si Ara. Procedând în acelaș mod pentru cele - l - alte muchi,



vom înlocui unghiul solid prin un vârf cu 3a fete. Inlocuind si cele l - alte unghiuri ale cubului si înaintând cu truncheturile până ce facem să dispară fetele Cubului, se va obține un solid care va avea $6 \times 8 = 48$ fete si care

se numeste: Hexoctaedru. Fetele a acestui solid vor fi de sigur niste triunghiuri scalene dreptunghice, din care compoza B a dat acestui solid si numele de Scalenocedru. Cele - l - alte elemente sunt: 72 muchi de 3 feluri: 24 muchi mai lungi V, 24 muchi mijlociu X si 24 muchi mai scurte V. - Muchile lungi reunesc extremitatile axelor ternare cu a axelor coaternare; muchile mijlociu unesc extremitatile axelor binare cu a axelor coaternare, iar muchile scurte unesc extremitatile axelor binare cu a axelor ternare. - Unghiurile solide în număr de 26, sunt de trei specii: 6 unghiuri p, corespunzând extremitatilor axelor coaternare, formate alternativ

de muchi mari si mijlocii; apoi 8 unghiuri 0 corespunzătoare extremităților axelor ternare, formate de muchi alternativ lungi si scurte, si 12 unghiuri α corespunzătoare extremităților axelor binare, formate din muchi mijlocii si scurte. —

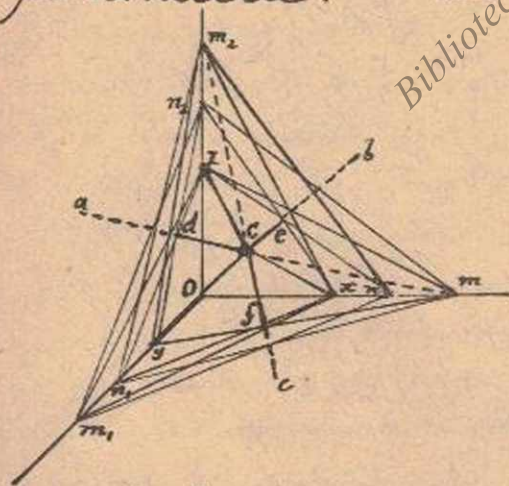
Notatiunea fetelor acestui solid va fi:

$$b' b_m^{\frac{1}{2}} b_n^{\frac{1}{2}}$$

Scalenoedrele cele mai frecvente sunt:

$$b' b^{\frac{1}{2}} b^{\frac{1}{2}}, b' b^{\frac{1}{3}} b^{\frac{2}{3}}, b' b^{\frac{1}{4}} b^{\frac{3}{4}} \text{ etc.}$$

— După Naumann acest solid se numește Hexakisostaedru si corespunde raportului parametric: $a : ma : na$. —



Pentru a-l obține se aplică pe axe fete, care să atingă o axă la extremitate si pe cele lalte două la distanțe m si n deosebite între ele si > 1 . — Așa: Să aplicăm fetele:

xn, m_2 si xn_2, m_1 pe extremitatea lui x , luând

pe cele lalte axe distanțe m si n : de se vor înălța după intersecția ax . — De asemenea fetele

ym_2 , și ymn_2 se tace după dreapta $y\epsilon$, care se întâlnește cu xa în punctul C. În fine: zm , și zn, m se tace după zc , care trece de asemenea prin C. Apoi mrm , și $my n_2$, dau intersecția md , xm, n_2 și zm, n dau pe me , pe când $m_2 y n$ și $m_2 x n$ dau pe: $m_2 f$. - Se obține în definitiv conturul: $xy d r e$, care conține șase fețe triunghiulare, dispuse în jurul punctului C. -

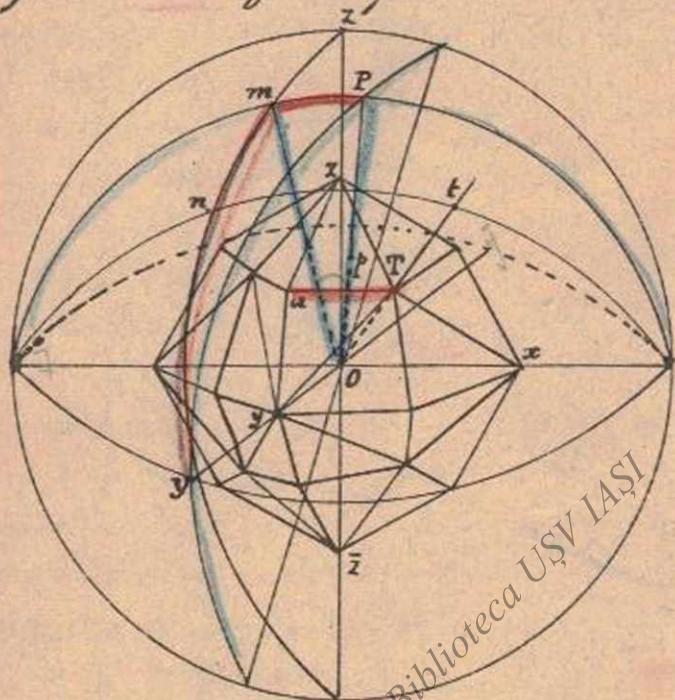
Raportul parametric fiind: $a : na : ma$, notațiunea solidului va fi: mOn . -

— Pentru a obține notațiunea după Miller, luăm fata notată în parametri: $a : na : ma$, de unde: $\frac{1}{1} : \frac{1}{n} : \frac{1}{m}$ sau în indici: (mn, m, n) . -

În genere așa atîtă la extremitate este afectată de doi indici. — —

Pentru a avea proiectia polilor fetelor Scalenoedrului, vom proceda ca și în cazul Solidelor examinate mai înainte. Să considerăm dar un Scalenoedru înscris în Sfera de proiectiune; observăm că, în jurul punctului T, care este extremitatea axei ternare, se găsesc 6 fețe și că, planurile cercurilor de 45° între x și y , x și z , y și z , trec prin muchia mare, așa că polii

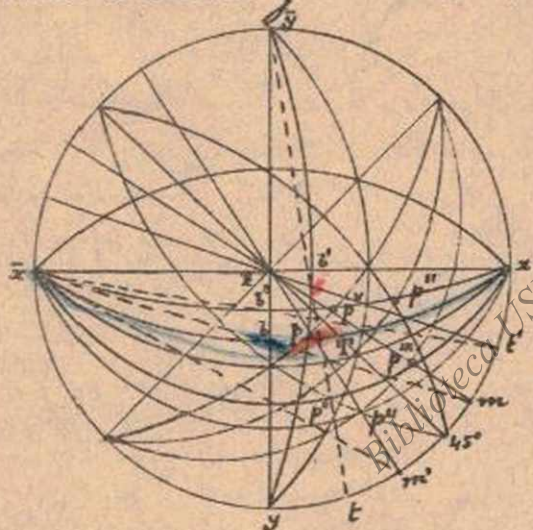
fețelor vor fi cuprinse în triunghiurile formate



pe planul de proiecțiune, de proiecțiunile axelor $x\bar{x}$, $y\bar{y}$, $z\bar{z}$ și proiecțiunile cercurilor de 45° care trec prin I , polul feței Octaedrului. - Pentru a determina proiecțiunile profilor acestor fețe, vom lua mai întâi față $z\alpha T$. Polul său

P se găsește la intersecția cercului $y\bar{P}\bar{y}$ și a cercului $x\bar{P}\bar{x}$, așa că proiecția sa se va afla la intersecția proiecțiilor acestor două cercuri. - Să presupunem că avem: $\angle \alpha = 148^\circ 59' 58''$; Suplimentul său: $31^\circ 0' 2''$ reprezintă unghiul normalilor la fețele ce formează diedrul $\angle \alpha$. Însă planul $z\bar{y}\bar{z}$, care trece prin $\angle \alpha$, împarte în două părți egale unghiul normalilor: jumătatea acestui unghi care este: $15^\circ 30' 1''$ reprezintă inclinarea cercului $z\bar{P}\bar{z}$ cu cercul $z\bar{y}\bar{z}$, care

inclinare e măsurată prin arcu mP . - Rabatând deci cercul $xP\bar{x}$ în jurul lui $x\bar{x}$, punctul m vine în y , iar P la o distanță de: $15^{\circ}30'1''$ către x , pe când punctul de vedere este în $\bar{y}$. Deci: plecând de la y spre x , luăm arcu $yt = 15^{\circ}30'1''$, unim t cu $\bar{y}$, ceea ce



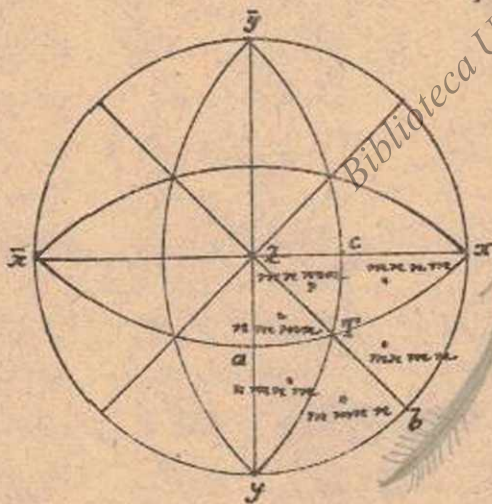
dă cu $x\bar{x}$ intersecția b' . Prin $y, b', \bar{y}$, facem să treacă un cerc mare, care reprezintă proiectia cercului $yP\bar{y}$. - Pentru a proiecta cercul $xP\bar{x}$, observăm că: cercul de 45° între z și y , trecând prin I , împarte în două părți egale

le diedrului Ia și prin urmare și unghiul normalilor la fețele zaI și yaI , care formează acest diedru. Valoarea lui Ia fiind: $158^{\circ}12'58''$, unghiul normalilor este de $21^{\circ}47'2''$ și jumătatea sa: $10^{\circ}53'31''$ reprezintă unghiul cercului $xP\bar{x}$ cu cercul de 45° , reprezentat prin arcu mn ; atunci unghiul lui $xP\bar{x}$ cu planul cercului de proiectiune va fi: $45^{\circ} + 10^{\circ}53'31'' = 55^{\circ}53'31''$, reprezentat prin arcu $mn\bar{y}$. - Rabatând atunci

cercul $ymxy$ în jurul lui yy , & cade în x și punctul de vedere în $\bar{x}$, pe când punctul m vine pe circumferința cercului de proiecțiune la o distanță de $55^\circ 53' 31''$ de la y spre x . Deci, plecând de la y spre x luăm arcul $ym = 55^\circ 53' 31''$, unim pe m cu $\bar{x}$, ceea ce dă cu yy intersecția $\bar{b}$; prin $x, \bar{b}$ și $\bar{x}$ facem să treacă un cerc mare, care reprezintă proiecția lui $xP\bar{x}$ și care întâlnește cercul $y\bar{b}y$ în punctul p , care reprezintă proiecția polului P . —

În același mod vom obține proiecția polilor celorlalte fete. — —

Pentru a avea notația proiecțiunii polilor celor



6 fete, ce se găsesc în jurul lui T , vom avea trebuința metoda rotativei în jurul lui T . Fata xat a cărui pol a fost proiectat, este aplicată pe extremitatea lui x , atinge pe x la distanța m și pe y la distanța n ; deci, notația sa va fi:

$ma : na : a$ sau $(n m mn)$. Dacă această față se învârtă în jurul lui T , în sens invers acelor din un ceasornic, făcând să ocupe pe rând

pozitiunea celor-lalte fete, vom observa că, dacă
ea ocupă poziția fetei yaT , atunci x a luat
locul lui y , așa că notația sa devine:

$n m m n$ sau scriindu-le în ordinea nor-
 $x \bar{x} y$ mală vom avea: $n m n m$; deci no-
tația fetei yaT va fi: $(n m n m)^x y z$. Vom avea
pe rând notațiunile: $n m n m$ în $m m n n$

sau pentru $y b T$ notațiunea: $(m m n n)^x y z$. Apoi:

$m m n n$ în $m m n n$ sau $(m m n n)$ pentru $x T b$.

$y x z$ $x y z$
 $m m n n$ în $m m n n$ sau $(m m n n)$ $x T c$.

$z y x$ $x y z$
 $m m n n$ în $m m n n$ sau $(m m n n)$ $z T c$.

Făcând rabaterea în jurul lui $x \bar{x}$ și apoi
a lui $y \bar{y}$, vom obține notațiunile celor-l-
alte fete a solidului. —

Formulele generale pentru transformarea
notațiunilor sunt:

$$b^{\frac{1}{2}} b^{\frac{1}{3}} b^{\frac{1}{6}} : a : \frac{r}{g} a : \frac{r}{p} a - \frac{p}{r} \frac{0p}{g} - (pqr) .$$

Pentru principalele scalenocedre vom avea:

$$b'b^{\frac{1}{3}}b^{\frac{2}{3}} - a : \frac{1}{3}a : \frac{2}{3}a - \frac{3}{2}0\frac{1}{2} - (362)$$

$$b'b^{\frac{1}{2}}b^{\frac{1}{2}} - a : \frac{1}{2}a : \frac{1}{2}a - 30\frac{3}{2} - (321).$$

$$b'b^{\frac{1}{4}}b^{\frac{3}{4}} - a : \frac{1}{4}a : \frac{3}{4}a - 50\frac{5}{4} - (541).$$

B. Modificări pe muchii.

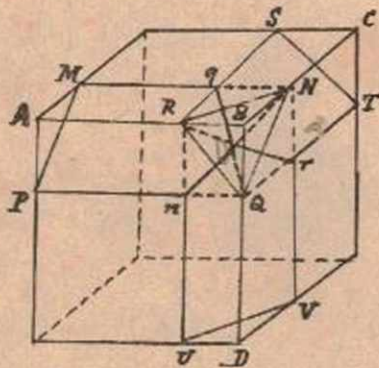
Modificările pe muchii sunt de două feluri:
1^o Simetrice și 2^o Disimetrice. — —

1^o Modificări simetrice.

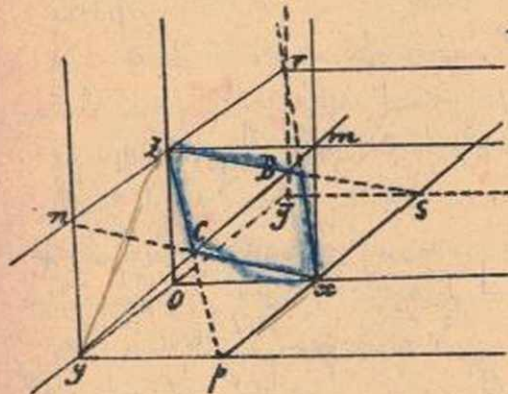
Avem un singur caz, care ne conduce la:

Dodecaedrul romboidal.

Pentru a obține acest solid după Descartes, vom înlocui muchiile cubului prin o față paralelă cu muchia, luând pe celelalte două, distanțe egale. Astfel în cele trei planuri $MNPQ$, $RSTQ$ și $RNUV$ înlocuind cele trei muchii ce formează unghiul B , determinăm intersecțiile



aceste două planuri vor întâlni planul ce trece prin x și z paralel cu y după dreptele: xn și zp .



Aceste trei intersecții se tăie în punctul C. Pentru a avea conturul complet al fetei ce trece prin z și x , va trebui să determinăm intersecțiile cu planurile ce trec prin y . — Așa: cu planul ce trece

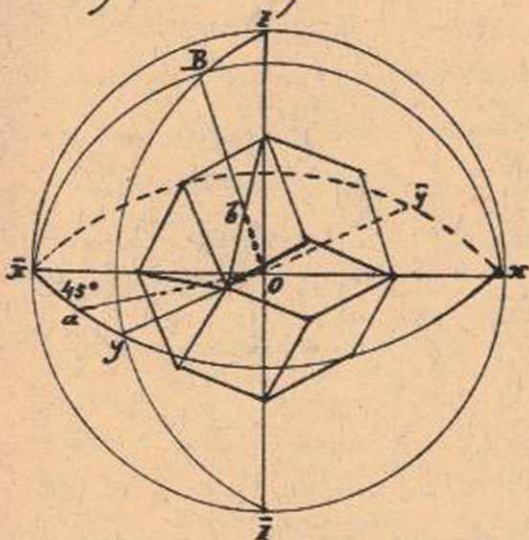
prin x și y paralel cu z avem intersecția xt , iar cu planul ce trece prin z și y , paralel cu x , avem intersecția zt . Aceste două din urmă intersecții se tăie în punctul B, așa că conturul definitiv al fetei aplicate pe x și z va fi: zCB , care este un romb. —

După cum am văzut mai sus, raportul parametric este: $a : a : \infty a$, deci notațiunea va fi: $\infty 0$. —

Din notația parametrică de mai sus deducem notația în indici: $\frac{1}{1} : \frac{1}{1} : \frac{1}{\infty}$ sau (110). —

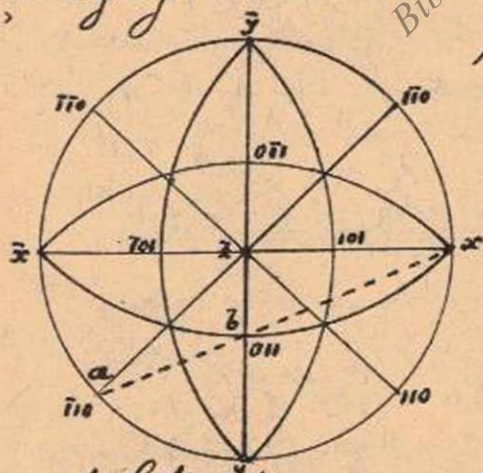
— Dacă înscrinem dodecaedrul romboidal în Sfera de proiecție, observăm că fetele sunt dispuse în două moduri: patru fete laterale sunt

astfel în dispuse în cât normalele la aceste fețe



se găsească în planul de proiectiune și polii lor se proiectează pe circumferența cercului de proiectiune și la 45° între proiectiunile planului cercului fundamental și a planului cercului normal la acesta. — Cele - l - alte 8 fețe sunt dispuse în

grupe de câte 4 în jurul extremităților axei $\bar{z}\bar{z}$; deci polii lor se vor găsi pe cercurile mari $\bar{x}\bar{x}$ și $\bar{y}\bar{y}$. Dacă considerăm fața aplicată pe $\bar{z}$ și $\bar{y}$



paralel cu $\bar{x}\bar{x}$, normală $\bar{O}B$ la aceasta față atinge sfera de proiectie în punctul B care se găsește la intersecția cercului $\bar{x}\bar{y}\bar{y}$ cu cercul $\bar{x}B\bar{x}$. Pentru a găsi proiectia cercului $\bar{x}B\bar{x}$, observăm că, unghiul fețelor aplicate pe $\bar{z}$ și $\bar{y}$ și pe $\bar{z}$ și $\bar{y}$ fiind de 90° , unghiul normalilor la aceste fețe este asemenea de 90° și prin urmare unghiul

yOB este de 45° . - Rabatând cercul $xBy\bar{z}$ în jurul lui $y\bar{y}$, punctul de vedere vine în x și punctul B în $\underline{a}$, la 45° de la y spre $\bar{x}$. Deci: unind punctul de vedere x cu $\underline{a}$, obținem în $\underline{b}$ intersecția cu $y\bar{y}$ și cercul $x\bar{b}\bar{x}$ va fi proiecția cercului $xB\bar{x}$; deci: proiecția polului B va fi în $\underline{b}$. -

Pentru a avea deci proiecția probilor fetelor dodecaedrelui romboidal este de ajuns a construi proiecțiile cercurilor mari de 45° între $\bar{x}$ și extremitățile axelor $x\bar{x}$ și $y\bar{y}$, precum și a cercurilor mari de 45° între $x\bar{x}$ și $y\bar{y}$, ce trec prin $\bar{x}\bar{x}$. La intersecția cercurilor de 45° cu axele se vor găsi proiecțiile polilor fetelor din jurul axii $\bar{x}\bar{x}$, pe când la extremitățile diametrelor de 45° vor fi polii fetelor verticale. -

Prin urmare: în $\underline{b}, \underline{b}', \underline{b}'', \underline{b}'''$ se găsesc polii fetelor: $011, 101, 0\bar{1}\bar{1}$ și $\bar{1}\bar{0}\bar{1}$, pe când în $\underline{a}, \underline{a}', \underline{a}'', \underline{a}'''$ polii fetelor: $\bar{1}10, 110, \bar{1}\bar{1}0$ și $\bar{1}\bar{1}0$. -

2^o Modificări disimetrice.

Si aici avem o singură formă care este:

Cubul piramidat.

Dupa Levy, se obține acest solid înlocuind muchiile cubului prin câte două fețe paralele cu o

nare a cubului și 12 muchi lungi, corespunzătoare cu muchile cubului; apoi 14 unghiuri solide de două feluri: 6 unghiuri formate de câte 4 muchi scurte, corespunzând axelor coater-nare și 8 unghiuri formate din câte 6 muchi alternativ lungi și scurte, corespunzând axelor ternare.

Simbolul fetelor va fi: $b^{\frac{2}{3}} b^{\frac{1}{2}} b^{\frac{1}{3}}$ sau $b^{\frac{m}{n}}$.

Cele mai frecvente tetrahexaedre sunt:

$$b^{\frac{2}{3}} b^{\frac{1}{2}} b^{\frac{1}{3}} \text{ --- } b^{\frac{3}{2}}$$

$$b^{\frac{2}{3}} b^{\frac{1}{2}} b^{\frac{1}{3}} \text{ --- } b^2$$

$$b^{\frac{2}{3}} b^{\frac{1}{2}} b^{\frac{1}{3}} \text{ --- } b^3$$

După Naumann acest solid se numește:

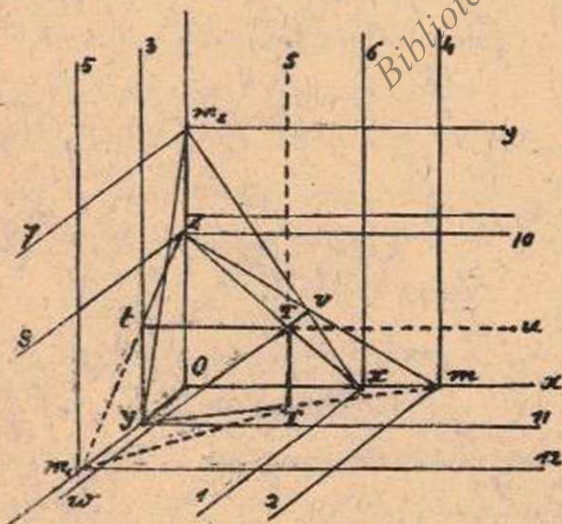
Tetrahexaedru

și corespunde raportului parametric:

$$a : ma : oa.$$

și se obține aplicând fete care ating o axă la extremitate, atingând pe a doua la o distanță $m > 1$, și paralele cu a treia.

Astfel în: fetele xm, yb și ym, zc paralele cu axa de z , au intersecția



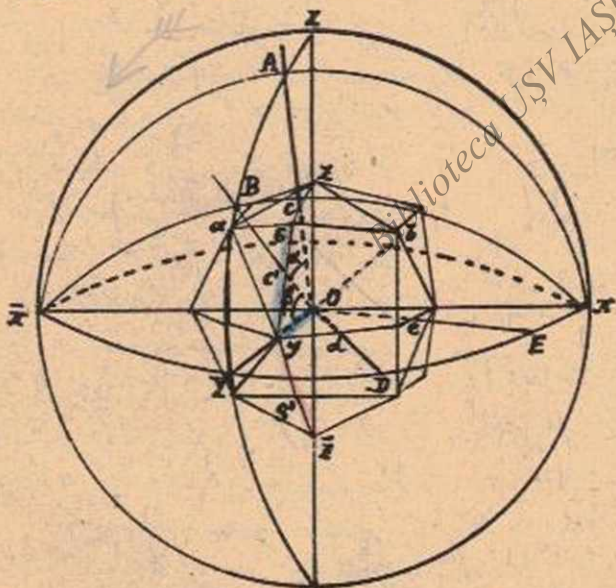
și paralela cu Oz , pe când fetele paralele cu Ox

vor avea intersecția tu și acele paralele cu Oy , intersecția vw . Aceste trei intersecții vor avea un punct comun T unde se întrunesc și celelalte intersecții a fetelor, așa că în jurul punctului T se vor reuni 6 fete. — —

Notatiunea Solidului va fi: $\infty 0 m$. — —

— Din notatia în parametru: $a : ma : \infty a$, deducem notatia în indici: $\frac{1}{1} : \frac{1}{m} : \frac{1}{\infty}$ sau $(m 1 0)$. —

— Pentru a obține proiecția polilor fetelor Tetrahexaedrului, să considerăm Solidul în



seris în Sfera de proiecție. Observăm că și aici ca și la dodecaedrul romboidal, sunt fete a căror poli cad pe circumferența cercului de proiecție, pe când altele au poli lor pe cercurile mari a căror proiecții sunt axele xx' și yy' , di.

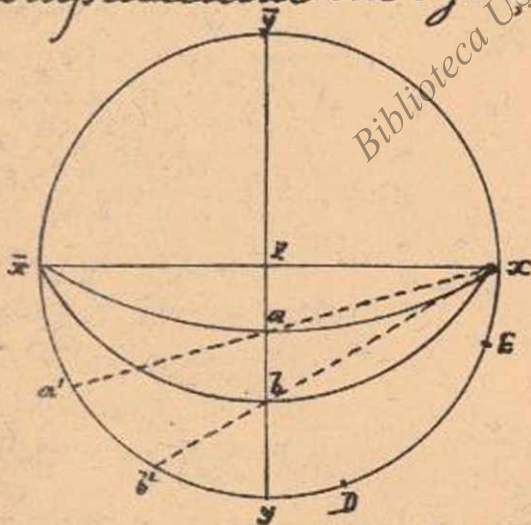
ametrice cercului de proiecție. — Să considerăm fetele xab și yab ; poli lor se găsesc pe cercul mare xyz , la intersecția cu cele două cercuri

muri: $x A \bar{x}$ și $x B \bar{x}$. Fie că proiectia cercului xyz este diametrul corespunzător, ne rămâne să determinăm proiectiile celor l-alte două cercuri. - Observăm că: normalele scoborâte din centru pe cele două fete, le ating în punctele C și C' și formează între ele unghiul α , care este suplimentul diedrului corespunzător muchiei ab ; fie: $143^{\circ} 7' 58''$ valoarea diedrului: Suplimentul său va fi: $36^{\circ} 52' 2''$ care e valoarea lui α . Dacă unghiul SyS' este: $126^{\circ} 52' 2''$ rezultă că: $OyS = 63^{\circ} 26' 1''$ și fiind că triunghiul OyC' este dreptunghic în C' , rezultă că: $C'Oy$ este complementul lui OyS și are ca valoare:

$26^{\circ} 33' 59''$. Avem dar:

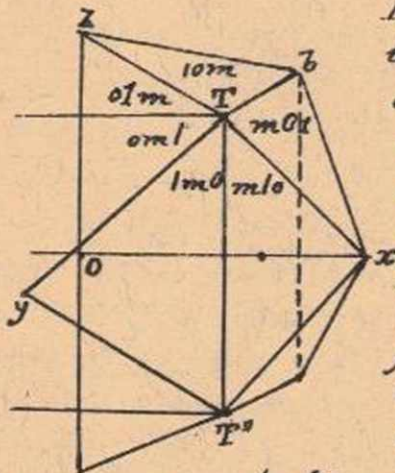
$\alpha = 36^{\circ} 52' 2''$, $\beta = 26^{\circ} 33' 59''$

Atunci cercurile $x A \bar{x}$ și $x B \bar{x}$ sunt inclinate către cercul de proiectie de: $\alpha + \beta = 63^{\circ} 36' 1''$ și $\beta = 26^{\circ} 33' 59''$. Pentru a face proiectia lor, rabatem cercul $y B A \bar{y}$ în jurul lui



yz , așa că z cade în $\bar{x}$, pe când punctul de vedere vine în x . Atunci punctele B și A cad pe circumferința cercului de proiectie în punctele

proiecțiunea polilor acelor fețe. — —



Pentru notatia tuturor fețelor, observăm că: e de ajuns de a determina notatiunea una, pentru a obține prin metoda rotației în jurul lui T, notatiile tuturor celorlalte. Așa: fața xTb fiind paralelă cu y, atinge pe z la m și pe x la extremitate;

vom avea deci notatia: $(m01)$. Celelalte fețe vor avea succesiv notatiunile: $(10m)$, $(01m)$, $(0m1)$, $(1m0)$ și $(m10)$. — —

Pentru formulele de transformare a notatiunilor avem:

$$b^{\frac{1}{3}} b^{\frac{1}{3}} b^{\frac{1}{3}} = b^{\frac{1}{3}} - a : \frac{10}{9} a : \infty a - \infty 0 \frac{10}{9} - (p90).$$

Pentru principalele Tetrahexaedre vom avea:

$$b^{\frac{1}{3}} b^{\frac{1}{3}} b^{\frac{1}{3}} = b^{\frac{3}{2}} - a : \frac{3}{2} a : \infty a - \infty 0 \frac{3}{2} - (320).$$

$$b^{\frac{1}{3}} b^{\frac{1}{3}} b^{\frac{1}{3}} = b^2 - a : 2a : \infty a - \infty 02 - (210).$$

$$b^{\frac{1}{3}} b^{\frac{1}{3}} b^{\frac{1}{3}} = b^3 - a : 3a : \infty a - \infty 03 - (310).$$

II. Forme hemiedrice.

S'a fis că, formele hemiedrice se obțin dacă se modifică numai pe jumătate din elementele formei primitive. Aceste forme pot fi:

1° Forme hemiedrice cu fețe inclinate, care nu au nici macar două fețe paralele.

2° Forme hemiedrice cu fețe paralele și 3° Forme hemiedrice plagiedre. Pe lângă aceste mai există un gen de dublă hemiedrie numită:

4° Tetartodrie, în care se obține numai a patra parte din fețele formei holodrice corespondente. —

Pentru notația formelor hemiedrice după Levy și Naumann, se scrie notația formei holodrice corespondente și se precede de semnul $\pm \frac{1}{2}$, căci sunt două fețe de hemiedrie: una pozitivă sau directă și alta negativă sau inversă, după cum se modifică un și/sau altul de elemente alterne. Pentru notațiile după Miller se întrebuintează litera K, pe care o punem înaintea notației formei holodrice corespondente, pentru formele cu fețe inclinate (de la cuvântul grecesc Kλίνο (încălcat)); apoi: litera H pentru formele cu fețe paralele; și litera J (de la cuvân-

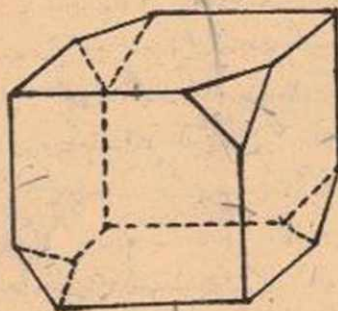
tul Giroedru) pentru formele plagiedre. Pentru a nota formele tetartoeedrice, se scrie înaintea formei holoeedrice corespondente: $\pm \frac{1}{4}$ sau după Miller: πK . — —

1^o Hemiedrie cu fețe inclinate.

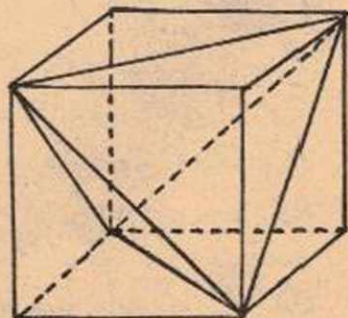
Pentru a obține formele hemiedrice cu fețe inclinate, plecând de la cub, trebuie să modificăm elementele care corespund unei axe de simetrie nepareche; în cazul nostru sunt unghiurile solide, care corespund axelor ternare. Deci, vom obține 4 forme hemiedrice corespunzătoare la atâtea forme holoeedrice, prin modificarea unghiurilor. — Aceste forme sunt:

Tetraedrul.

După Levy acest solid se obține înlocuind prin

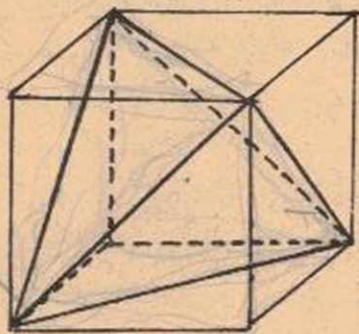


o față unghiurile solide alterne ale cubului, așa că un unghi fiind modificat la o extremitate



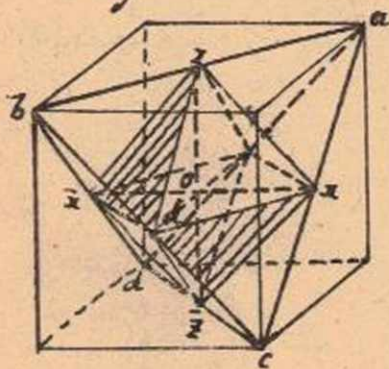
a unei axe ternare, unghiul corespunzător celei alte

extremități rămâne nemodificat. Înaintând cu truncheturile până la dispariția fețelor cubului, se obține un solid care n'are decât patru fețe și care se cheamă Tetraedru. El are:



patru fețe, care sunt triunghiuri echilaterale egale, apoi 6 muchii egale corespunzând diagonalelor fețelor cubului și în fine 4 unghiuri solide triedre egale. — După poziția unghiurilor cubului care au fost modificate, se obțin două solide: unul direct sau pozitiv și altul invers sau negativ. Atunci notația generală a Tetraedrelor este: $\pm \frac{1}{2} \alpha'$. — —

După Naumann, pentru a obține formule



hemiedrice se întrebuintează o metodă generată, care consistă în a considera forma holodrică corespundență și a dezvoltă fețele alterne până la dispariția celor l. alte fețe. Considerând deci Octaedrul. Să presupunem

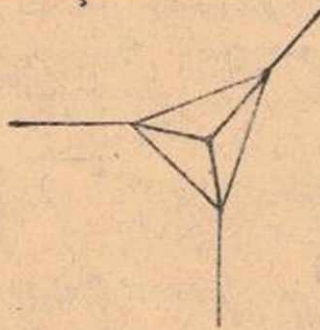
că în piramida superioară dezvoltăm fețele

alterne neadiacente xyx și $x\bar{y}\bar{x}$, iar în piramida inferioară fețele alterne neadiacente: $x\bar{y}\bar{z}$ și $y\bar{x}\bar{z}$. Este evident că cele două fețe superioare dezvoltându-se, vor avea ca intersecție dreapta ab , paralelă cu xy și $\bar{x}\bar{y}$ și trecând prin f , care este punctul comun al acestor două fețe; pe când fețele inferioare vor avea ca intersecție dreapta de , care trece prin $\bar{z}$ și e paralelă cu $x\bar{y}$ și $\bar{x}y$. - Și fiind că, în același timp fețele superioare trebuie să se întâlnească cu fețele inferioare, față xyz va avea cu $x\bar{y}\bar{z}$ intersecția ac care trece prin x , paralelă cu yz și $\bar{y}\bar{z}$. - - Notatiunea sa va fi: $\pm \frac{0}{2}$.

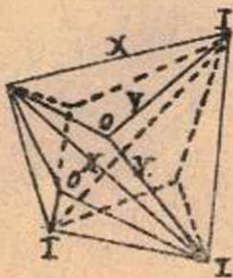
După Miller avem: $K(111)$ pentru tetraedrul pozitiv și $K(\bar{1}\bar{1}\bar{1})$ pentru tetraedrul negativ. -

Tetraedrul piramidal.

Se obține acest solid după Sevy, înclinând



unghiurile alterne ale cubului prin trei fețe înclinate către fețele cubului. Solidul care rezultă



are forma unui tetraedru a cărui fețe sunt acoperite

de piramide triunghiulare. Din această cauză se numește: Tetraedrul piramidat sau Tritetraedru.

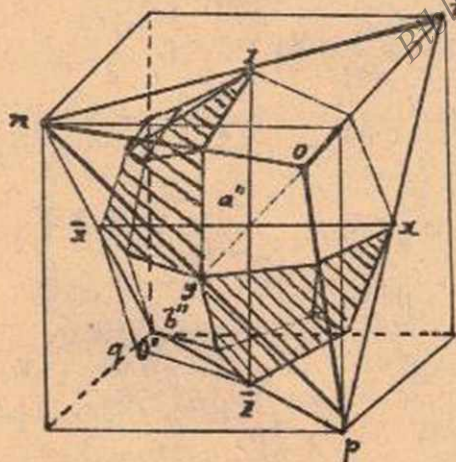
El are 12 fețe egale, care sunt triunghiuri isoscele; 18 muchi, care sunt de două feluri: 6 muchi λ corespunzătoare cu muchile tetraedrului și 12 muchi γ mai scurte, reunite câte trei în jurul extremităților axelor ternare și 8 unghiuri solide din care: 4 unghiuri I formate de 6 muchi, alternativ lungi și scurte și 4 unghiuri O formate din câte trei muchi scurte. - Acest solid fiind Trimedria Trapezodului, va avea ca notătinus:

$$\pm \frac{1}{2} a^m$$

- Sa considerăm după Naumann un Icosite-

traedru și să presupunem că fețele piramidelor O și O' se dezvoltă, pe când celelalte fețe dispar. Fețele piramidei O dezvoltându-se cele trei muchi care le separă se prelungească după: Om , On și Op , iar acele ale piramidei O' se prelun-

gesc după $O'n$, $O'p$, $O'q$. Apoi fețele a'' și b'' având

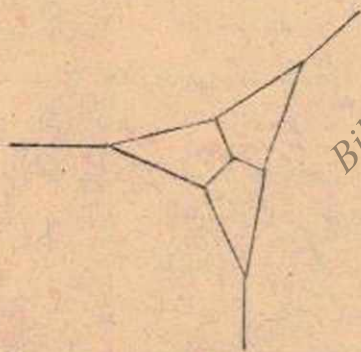


un punct comun în z dezvoltându-se vor da
prin intersecția lor dreapta np . În același
mod vom obține muchile mn , mp , ng și pg ,
care determină conturul fetelor anterioare.
Acest solid numit de Naumann Tria-kiste-
tetraedru, va avea ca notație: $+ mOm$.

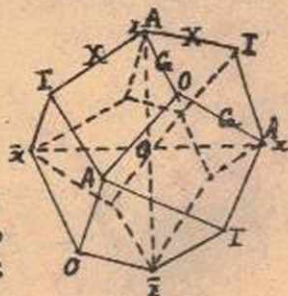
După Miller avem: $K(11m)$ și $K(\frac{2}{3}11m)$. --

Dodecaedrul Trapezoidal.

Înlocuind unghiurile alterne ale Cubului
prin câte trei fețe inclinate către muchile
cubului, se obține un solid cu 12 fețe, care



sunt niște
trapeze si-
metrice, și
care solid
se cheamă
Dodecaedrul
Trapezoidal.

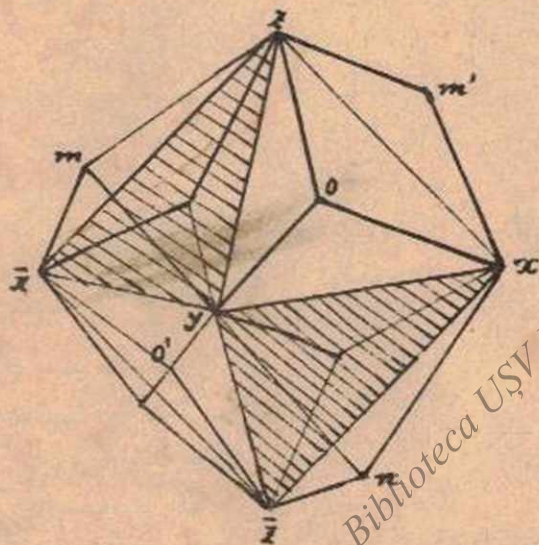


El are încă:

24 muchi de două specii: 12 muchi mai lungi X
corespunzătoare muchilor Tetraedrului și 12
muchii mai scurți G ; apoi 14 unghiuri Solide
din care: 6 unghiuri A formate de câte 4 muchi
alternativ lungi și scurți; apoi 4 unghiuri O
formate de câte trei muchi scurți, și în fine

4 unghiuri I formate de câte trei muchi mari.
Notatiunea sa este: $\pm \frac{1}{2} a^{\frac{1}{m}}$. —

Dupa Naumann Solidul acesta numit: Dodecaedru Deltoidal



derivă din Triakis-octaedru prin dezvoltarea fetelor care compun piramidele alterne.

Dacă fetele piramidelor O și O' se dezvoltă atunci fetele yOz a piramidei O se întâlnește cu fetele $\bar{x}O'y$ a piramidei O' și având punctul

de comun, vor da intersecția ym . De asemenea fetele yOx și $yO'z$ vor da intersecția yn . Dacă dezvoltăm de asemenea fetele piramidelor posterioare, vom avea în fetele intersecțiile: zm, zm', xn, xm', zn și $\bar{x}m$, care completează conturul fetelor noului solid. — — —

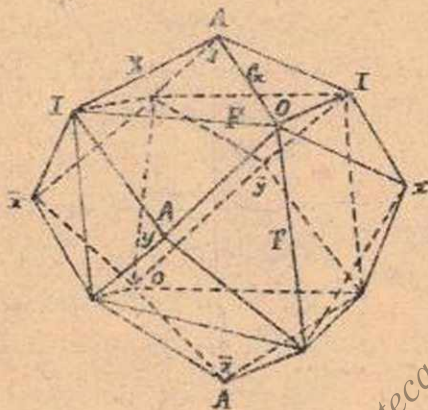
Notatiunea acestui solid va fi:

$$\pm \frac{m}{2} O . .$$

Dupa Miller: $K(mm1)$ și $K(m\bar{m}1)$. — —

Hexatetraedru.

Acest solid numit încă: Hemihexoctaedru se deduce din cub prin înlocuirea a 4 unghiuri alterne, fiecare prin câte 6 fețe. Se obține astfel un solid cu 24 fețe, care



sunt triunghiuri scalene. El are încă: 36 muchii

care sunt de 3 feluri: 12 muchii lungi F, 12

muchii mijlocii X și 12 muchii scurte A. Un

ghiurile în număr de 14 sunt de asemenea de 3 feluri: 4 unghiuri O

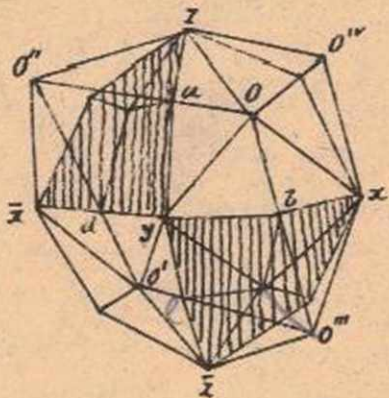
formate de 6 muchii, al-

ternative lungi și scurte, 4 unghiuri L formate de 6 muchii alternative lungi și mijlocii și 6 unghiuri A formate de câte 4 muchii alternative mijlocii și scurte. — —

Notăm că solidul va fi: $\frac{+1}{2} 6' 6'' 6'''$.

Acest solid numit de către Kaumann Hexakisotetraedru, se obține din Hexakisotetraedru, dezvoltând fețele piramidelor alterne. — Presupunem că fețele piramidei O se dezvoltă și se întâlnesc în fețele piramidei O'. Este ușor

de răput ca fața $O'ay$ se întâlnește cu fața $O'dy$ după yO'' , iar fețele Oyb și $O'ye$ după yO''' . - De asemenea, cele 6 alte fețe a piramidei O , se întâlnesc cu fețele piramidelor posterioare și dau intersecțiunile: xO'' , xO''' , xO'''' , xO''''' etc. ceea ce completează contururile celor șase fețe în



jurul lui O . - Notăm că Solidul răfi: $\pm mOn$. - După Miller avem: $K(mn mn)$ și $K(mn mn^2)$. -

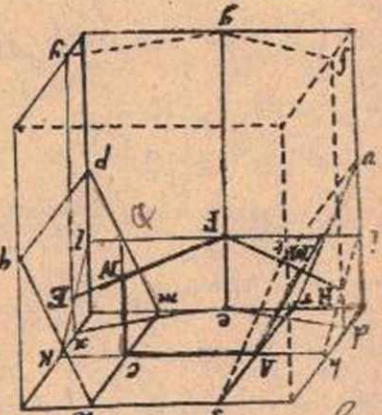
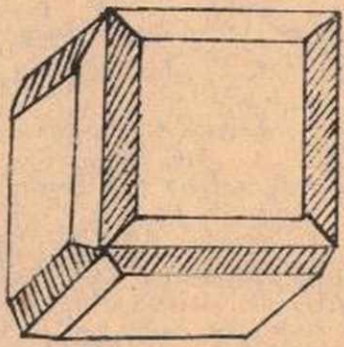
2^o Hemiedrie cu fețe paralele.

Acest gen de hemiedrie are loc atât în cazul modificărilor pe muchii ca și în cazul modificărilor pe unghiuri, conservând însă fețele paralele. - Vom avea dar două forme care sunt:

Dodecaedrul pentagonal.

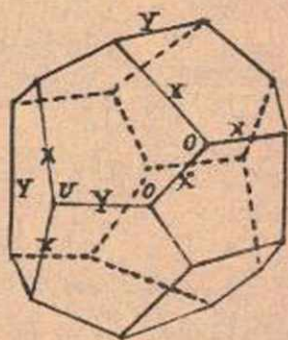
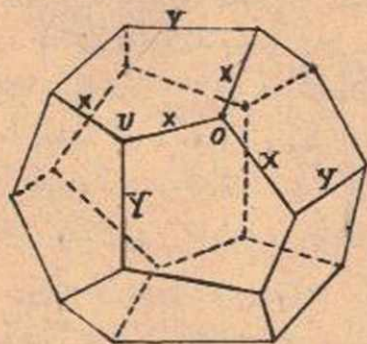
Se poate deduce acest solid din cub înlocuind muchiile prin două fețe simetrice și dezvoltând fețele alterne, până ce dispar fețele cubului. -

Se obține astfel un solid cu 12 fețe, care are forma
 de pentagonare dimeră, și care se numește: Dode-
 caedru pentagonal. -
 Sa considerăm acum un
 planul hkl paralel cu
 muchia anterioară, care
 intersectează muchia de
 la dreapta în stânga în
 mijlocul lor, în punctele
 h și k , iar muchia verticală
 anterioară la $\frac{1}{4}$ din
 lungimea lor în i și l . Un alt plan mnp , pa-
 ralel cu muchia inclinată
 de la dreapta, la un
 chetă anterioară la $\frac{1}{4}$ din
 lungimea
 sa și muchia verticală
 din dreapta în mijlocul
 sau p . - Un al treilea
 plan paralel cu muchia
 inferioară de la stânga
 intersectează muchia verticală
 de la stânga în
 mijlocul sau și muchia anterioară
 inferioară la $\frac{1}{4}$ din
 lungimea sa. Planurile deose-
 bite paralele cu muchia verticală
 intersectează la $\frac{1}{4}$ din lungimea lor, și muchia



anterosuperioară în mijlocul ei e. Aceste 5 planuri se taie după dreptele CD, EF, FH și AB. Intersecția planului $h'kl$ cu fața superioară a cubului fiind $h'k$, aceste linii determină prin intersecțiile lor respective un pentagon: ACNFM. — Dodecaedrul pentagonal are: 30 muchi, care

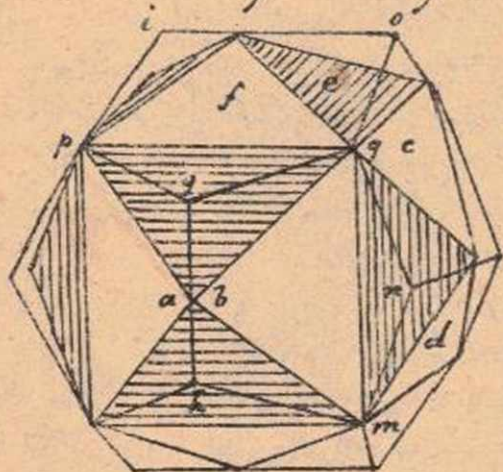
sunt de două feluri:
6 muchi Y mari, corespunzând cu fețele cubului, și 24 muchi X mai mici.
Unghiuri.



le solide în număr de 30 sunt de asemenea de 2 feluri: 12 unghiuri triedre simetrice U , formate din două muchi mici și una mare și 8 unghiuri regulate O formate din câte trei muchi mici. — Notă: în general: $\pm \frac{1}{2} 6^{\frac{m}{n}}$. —

După Naumann, dodecaedrul pentagonal derivă din Tetrakishehexaedru, prin dezvoltarea fețelor alterne. Să presupunem că în piramida anterioară se dezvoltă fețele a și b, care se

întâlnească după dreapta gh ; în piramida superioară trebuie să se dezvolte fața f și opusa sa care au ca intersecție dreapta io , pe când



fața f întâlnește fața a după pg și fața e după gg . În piramida care se găsește la dreapta, fațete opuse c și d dezvoltându-se vor avea ca intersecție dreapta nr , pe când e cu f se

taie după go și e cu b după gn ; de asemenea b și d vor avea intersecția mn . Se obțin astfel două fețe pentagonale: $ipgggo$ și $ghkmng$. Tot așa se vor obține și celelalte fețe.

Notatia dodecaedrului pentagonal este: după Naumann: $\pm \infty Om$.

După Miller avem: $2 \cdot \pi / (m \cdot 01)$ și $\pi / (10m)$.

Dodecadiedrul.

După Levy acest solid se obține prin înlocuirea unghiurilor cubului prin câte 6 fețe, și făcând să se dezvolte numai jumătate din ele și

anume fețele alterne. Se obține un solid cu 24 de fețe, care sunt niste trapeze nesimetrice. Solidul se numește Dodecadiedru sau Diploedru.

El mai are:

48 muchi care sunt de

3 specii: 12

muchii mai

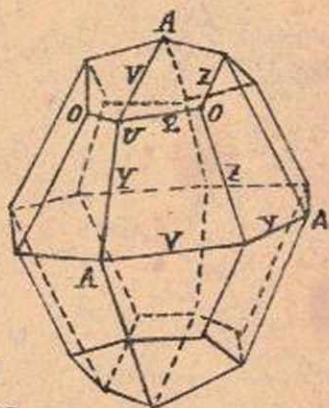
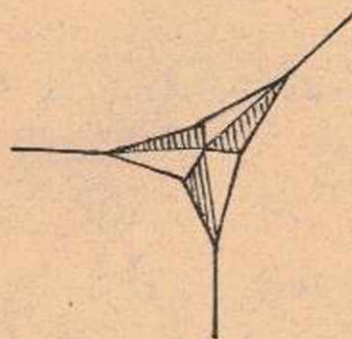
lungi V, 24

muchii mij-

locii Z și 12

muchii scur-

te Y. Unghiuri



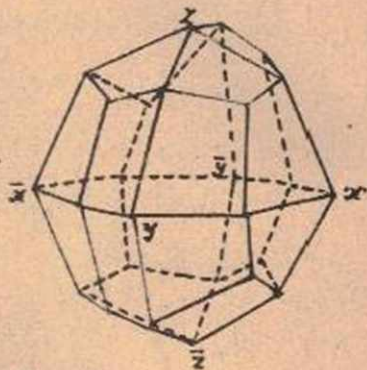
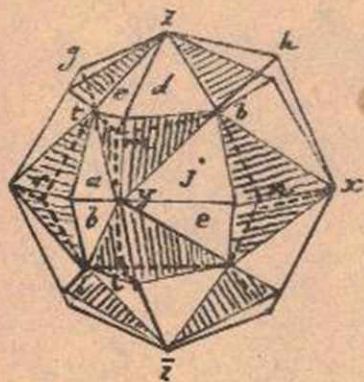
cele solide în număr de 36 sunt de trei feluri: 6 unghiuri A formate din câte 4 fețe, 8 unghiuri O formate din 3 fețe și 12 unghiuri V formate din 4 fețe. Pentru notatie suntem obligați a introduce o paranteză, pentru a-l deosebi de Hemihexakis-octaedru, care are aceeași notatiune, cu toate că e o altă hemiedrie. Notatiunea sa va fi deci:

$$+ \frac{1}{2} [b' b'' b''']$$

— După Naumann, acest solid se deduce din Henakis-octaedru prin dezvoltarea unui grup alteru de câte două fețe adiacente în jurul extremităților axelor coatemere. — Să presupunem că, în piramida octogonală în jurul

extremității axei z , dezvoltăm fețele adiacente

c și d anterioare și fețele opuse posterioare; aceste fețe a căror intersecție este muchia lm se întâlnesc



cu fețele posterioare după zg și zh . În piramida corespunzătoare axei y , fețele a și b precum și e și f se dezvoltă și se întâlnesc după muchiile ym , yn , yi și yr și cu fețele c și d după muchiile mb și mt ; și așa mai departe pentru celelalte fețe. —

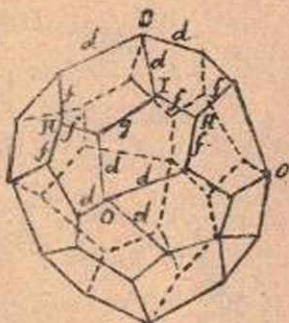
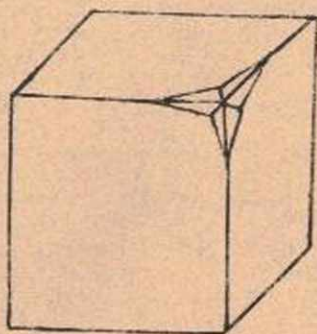
Notățiunea sa este: $\pm \left[\frac{mOn}{2} \right]$. —

După Miller avem: $\pi \left(m1 \frac{m}{n} \right)$ și $\pi \left(m \frac{m}{n} 1 \right)$. —

3^o Hemiedrie plagiedră.

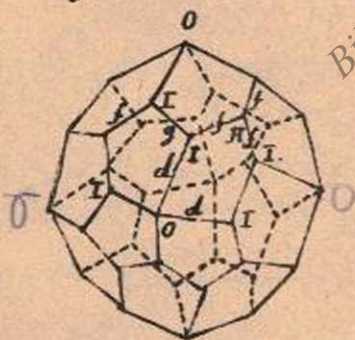
În acest gen de hemiedrie se suprimă fețele alterne printre acele ce modifică un unghi, însă se conservă fețele paralele cu acele care au fost suprimate. Aceasta hemiedrie nu poate să se aplice de cât fetelor Hexakisocedrubin, și

se obține un Solid cu 24 fețe, care sunt pentagoane neregulate egale având două laturi adiacente egale. Acest Solid se numește: Icositetraedru pentagonal



[Dr.]

sau Giroedru, de unde s'a luat litera f pentru notatiunea acestui hemiedru. Solidul are: 60 de muchii din care: 24 muchii d care formează câte 4 unghiurile O ale Octaedrului; apoi alte 24 de muchii f concurând câte 3 la formarea unghiurilor cubului; și 12 muchii g care reunește muchiile d. Unghiurile Solide sunt de 3 feluri: 6 unghiuri Octaedrice O cu câte 4 fețe, 8 unghiuri cubice H cu câte trei fețe și alte 24 unghiuri I compuse din câte trei fețe de-



[St.]

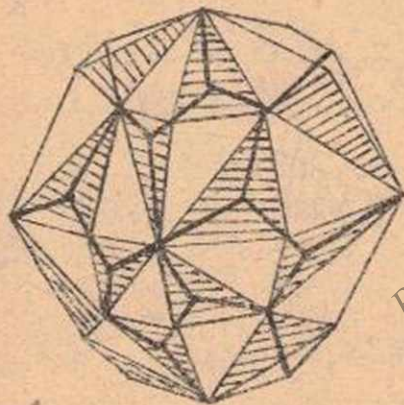
osebite de cele precedente. Sunt două forme: una dreaptă și alta stângă, care conservă toate actele de simetrie, dar nu mai au planuri de

simetrice, așa că ambele forme de și simetrice nu mai sunt superpozabile. —

Notatiunea e analoagă cu cea a celor l. alte hemiedrui a Hexoctaedrului: $\pm \frac{1}{2} \{b^{\frac{1}{2}} b^{\frac{1}{2}} b^{\frac{1}{2}}\}$. —

— După Naumann pentru a obține această hemiedrie plecăm de la Hexakisoctaedru și considerând piramidele octogonale care corespund extremităților axelor coaternare, dezvoltăm fețele alterne, așa ca la o față conservată într-o

piramidă să corespundă o față adiacentă disparentă în cea l. altă piramidă. Așa, în figura a-
laturată se dezvoltă fețele nestriate și dispar fețele striate. După cum conservăm o serie sau alta de fețe, obținem solidul drept sau stâng. Pentru



notatiunea celor două forme, se întrebuintăza literile d sau st. initialele curintelor: drept sau stâng, pe care le scriem după simbol. Avem astfel: $\frac{mOn}{2} d$ și $\frac{mOn}{2} st.$

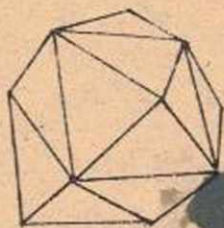
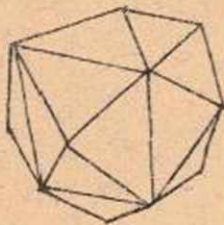
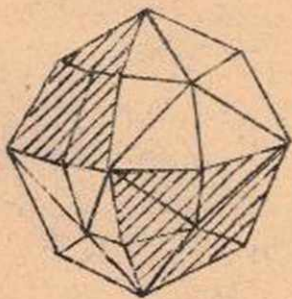
După Miller vom avea:

$$y\left(m \frac{1}{n}\right) \text{ și } y\left(m \frac{m}{n} 1\right). —$$

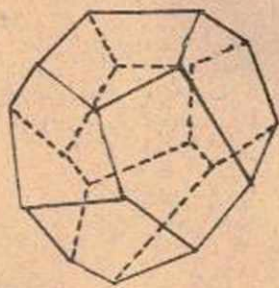
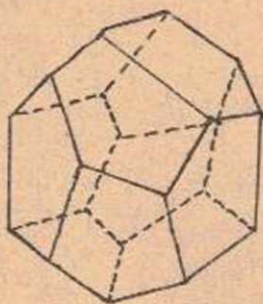
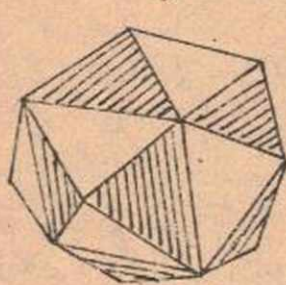
4^o. Tetartloedrie.

Această dublă hemiedrie a fost imaginată de către Naumann pentru a explica că, scalenocedrul, care este o formă hemiedrică a piramidei dihexagonale, dă naștere la rândul său la forme hemiedrice; și că romboedrul e și el o hemiedrie a piramidei hexagonale, hemiedrie la rândul ei a piramidei dihexagonale. Acest gen de hemiedrie nu se aplică de cât la sistemul cubic și hexagonal. Cristalograful francez nu se ocupa de acest gen de hemiedrie. — —

După Naumann, când se poate aplica mai multe forme holodrice succesiv două hemiedrii, forma rezultantă nu mai are de cât un sfert din numărul cristalelor formei holodrice, de unde s'a dat acestei duble hemiedrii numele de: Tetartloedrie. — — — —



Plecând dar de la Henakis octaedru se obțin prin o primă hemiedrie, doi Henatetraedri. Dacă aplicăm acestor două solide o nouă



D +

St +

hemiedrie, căpătăm în total 4 forme, care se numesc: Dodecaedre pentagonale tetraedrice. Fiecare formă are: 12 fețe care sunt niste pentagoane neregulate, 30 de muchii și 20 unghiuri Solide. —

Notatiunea lor după Naumann este:

$$+ \frac{mOn}{4} d, + \frac{mOn}{4} st, - \frac{mOn}{4} d, - \frac{mOn}{4} st.$$

După Miller vom avea:

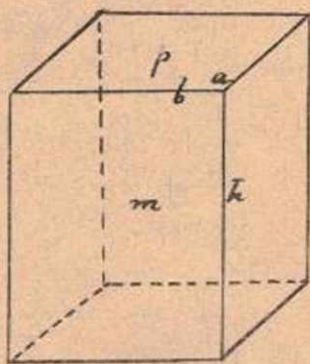
$$K\pi\left(m\frac{1}{n}\right), K\pi\left(\frac{m}{n}1\right), K\pi\left(\frac{m}{n}\bar{1}\right), K\pi\left(m\bar{1}\frac{m}{n}\right).$$

Fețele acestor solide nu se găsesc pe cristali de minerale; ele au fost găsite de către Scacchi, Baumhauer și Lewis pe cristali artificiali de apotat de bariu și de apotat de plumb. —

II

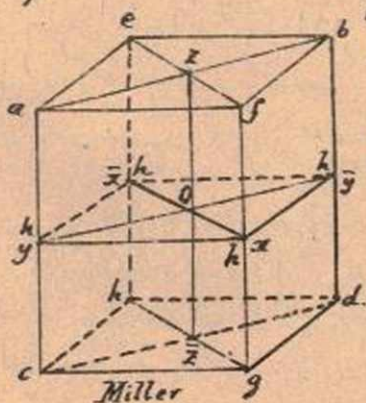
Sistemul Patratic.

După Levy, forma primitivă a acestui sistem este: Prisma dreaptă cu

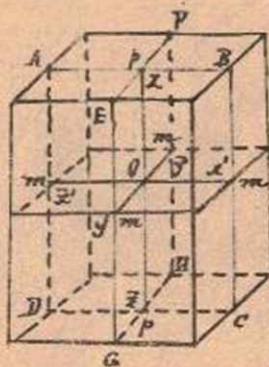


bază de pătrat, care are 6 fețe din care: 2 baze p care sunt niste pătrate, și alte patru fețe laterale m , care sunt niste dreptunghiuri; mai are 8 unghiuri solide triedre egale α ; 12 muchii din care: 8 baze b și 4 laterale h , formate de diedre

drepte. - Notatiunea sa generală e: mp . - -



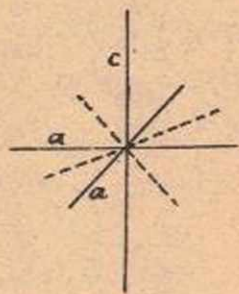
Elementele de simetrie sunt: 2 planuri de Simetrie bi-
nară $ABCD$ și $EFGH$, care trec prin mijlocurile muchii.



lor baze opuse și un plan de simetrie coaternară $PKL M$, care trece prin mijlocurile muchilor laterale opuse. — Din intersecția acestor trei planuri rezultă: două axe orizontale în un de simetrie binară și o axă verticală pp; de simetrie coaternară. Aceste trei axe sunt perpendiculare între ele, unesc mijlocurile fetelor opuse ale prismei și se întrunesc în punctul O , care este: Centrul de simetrie.

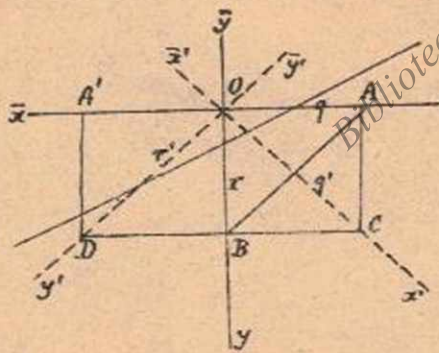
Dacă prin muchile laterale opuse ducem câte un plan, vom obține încă: două planuri de simetrie binară de a doua specie: $abcd$ și $efgh$, care, prin intersecția lor cu planul de simetrie coaternară, vor da încă: două axe de simetrie binară de a doua specie: hh , care vor uni mijlocurile muchilor laterale opuse. Deci: elementele de simetrie a sistemului patratic sunt: $P^4, 2P^2, 2P^1, C, L^4, 2L^2, 2L^1$. —

— Naumann caracterizează acest sistem, pe care-l numește: Tetragonal, prin trei axe dreptunghiculare din care: două axe egale, care sunt axele laterale situate într-un plan orizontal și a treia diferită și verticală, care se



numeste: axa principala, perpendiculara pe planul celor l. alte doua. Bisectritele unghiurilor formate de axele laterale, se numesc axe intermediare. Planul care trece prin axa principala si una din axele laterale se numeste: sectiune principala, iar planul, care trece prin axele laterale, se numeste baza. - Fiind ca axele nu sunt toate egale, parametrul lor vor fi: a pentru axele laterale si c pentru axa principala. -

Axele laterale a lui Naumann coincid cu axele de a doua specie a lui Levy, si fiind ca Miller admite axele lui Naumann, trebuie sa cautam formulele de trecere de la un sistem de axe la altul. Fie $\bar{x}\bar{x}$ si $\bar{y}\bar{y}$ axele lui Miller si $\bar{x}'\bar{x}'$, $\bar{y}'\bar{y}'$ axele lui Levy. Daca OA si OB sunt valorile parametrilor q si r , iar



OC si OD a lui q' si r' , avand $s = s'$, atunci, construind patratele pe OA si OB si pe OA' si OB' , vedem ca, OC este diagonala patratului construit pe OA si OB , deci, conform regulii paralelogramului vom ave: $q' = q + r \dots (1)$.

Însă OB poate fi considerat ca diagonală paralelogramului construit pe OA și OD , deci vom avea:

$$r = q + r'$$

de unde: $\dots r' = r - q \dots (2)$

Adunând egalitățile (1) și (2) vom avea:

$$q' + r' = 2r \text{ de unde: } r = \frac{q' + r'}{2} \dots (\alpha)$$

Scăzând (2) din (1) avem:

$$q' - r' = 2q \text{ de unde: } q = \frac{q' - r'}{2} \dots (\beta) \dots$$

Deci: pentru a găsi parametrul în raport cu axele lui Miller, când cunoaștem pe acei în raport cu axele lui Levy, întrebăm formulă:

$$q = \frac{q' - r'}{2}, \quad r = \frac{q' + r'}{2} \text{ și } s = s'.$$

Pentru cazul invers, avem:

$$q' = q + r, \quad r' = r - q, \quad s' = s. \dots$$

— Naumann numește Protoprismă forma primitivă a lui Levy. Pentru fețele laterale care sunt aplicate pe extremitățile axelor laterale, paralel cu axa principală, raportul parametric este: $a : a : \infty$

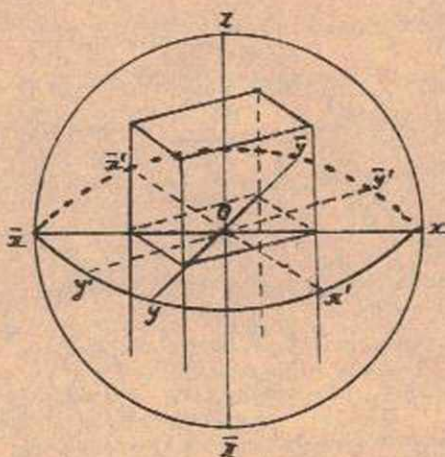
Deci notațiunea: ∞P .

Transformând parametrul în indici avem:

$$\frac{1}{1} : \frac{1}{1} : \frac{1}{\infty} \text{ sau } 1 : 1 : 0 \text{ De unde: notațiunea}$$

pentru fața aplicată pe extremitățile x și y va fi după Miller: (110) . — —

— Pentru a face proiecțiunea polilor fetei Proto-
prizmei, o considerăm



înscrisă în sfera de
proiecțiune așa ca
așele ei laterale să
fie în planul de pro-
jecție. Observăm atunci
că, normalele scoborâ-
te din centru pe fetele
prizmei sunt tocmai
așele $x'x$ și $y'y$; așa
dar polii acestor fete
se vor afla pe circonfe-

rența cercului de proiecțiune la extremitățile
axelor $x'x$ și $y'y$. Deci: pentru a ave proiecțiun-
ea acestor poli este de ajuns de a construi
diametrele de 45° între $x'x$ și $y'y$, și la extre-
mitățile acestor diametri se vor găsi proiecți-
unile polilor fetei prizmei. —

— Însă prizma lui Levy, conține și fetele p,
care sunt bazele. După Naumann aceste fete
se numesc de: Bazipinacoid și corespund ra-
portului parametric: $\infty a : \infty a : c$ sau: $a : a : Oc$.
de unde notațiunea: OP.

După Miller avem: $\frac{1}{\infty} : \frac{1}{\infty} : \frac{1}{c}$ sau ... (001).

Este ușor de văzut că poli fetei de Bazipinacoid

Se vor proiecta în Σ -

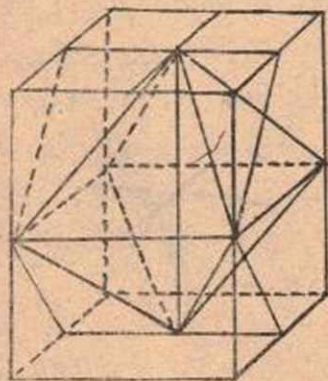
Pentru a obține din Piramă patratică formele secundare după Levy și Kaumann, vom urma aceeași metodă ca și la Sistemul cubic. Vom avea deci: 1^o Forme holodrice și 2^o Forme hemidrice.

1^o Forme holodrice.

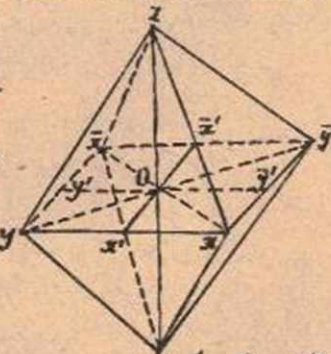
Fînd că numărul elementelor de simetrie a scăzut față cu Sistemul cubic, de aceea, modificăm-le prin care vom obține formele holodrice vor fi de trei feluri: A) Pe muchile bazice; B) Pe unghiuri și C) Pe muchile laterale.

A. Modificatie pe muchile bazice.

Aici nu avem de făcut de cît o modificare simetrică, care ne conduce după Levy la solidul numit:



Octaedrul direct, și care rezultă din Protoprismă înlocuind muchile bazice prin fețe paralele cu



aceste muchii, luând pe cele - l. - alte muchii distanțe

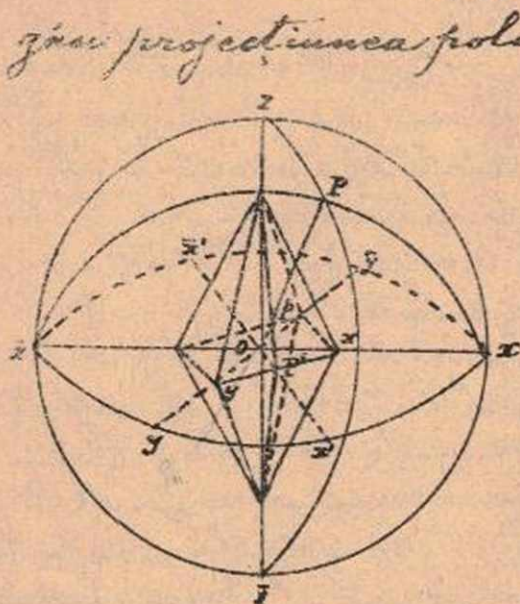
proportionale cu lungimile lor. Simbolul fetelor va fi: $b^{\frac{1}{2}} b^{\frac{2}{3}} b^{\frac{3}{4}}$. De unde notația: $\underline{b}^1$.

Acest Octaedru are 8 fețe egale, care sunt niste triunghiuri isoscele; apoi 6 unghiuri solide din care 2 culminante și 4 laterale; și 12 muchii din care 8 culminante și 4 laterale.

Dupa Naumann Octaedrul direct se numește: Protopiramida și corespunde raportului parametric: $a : a : c$, deci notațiunea P. Sau pentru cazul general: $a : a : mc$, de unde notațiunea: mP. Aceasta ne arată că sunt mai multe piramide dupa valoarea lui m: când $m < 1$ avem piramidele obtuse; când $m > 1$ piramidele sunt ascuțite.

Dupa Miller avem notațiunea (111) iar pentru cazul general (mm1). -- Pentru cele l. alte fețe superioare ale piramidei avem: (ii) (iii) și (iii), sau: (im1) (mm1) și (im1). -- Pentru notația fetelor inferioare, afecțăm cu semnul -- ultimul indice, care corespunde lui z .

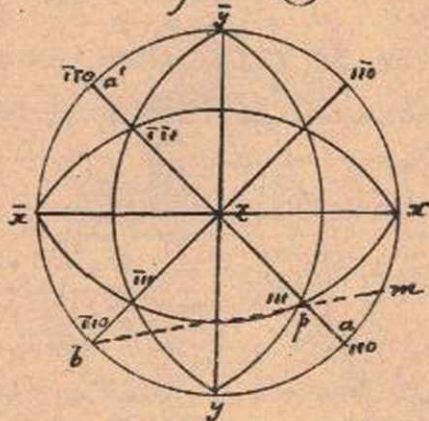
Pentru a face proiecțiunea polilor fetelor Protopiramidei, să considerăm centrul acestei piramide ca originea axelor și coincidând cu centrul sferei de proiecție în care e înscrisă piramida, în care planul cercului de proiecțiune este planul axelor x și y . Pentru a



zăm proiectiunea polului fetei xyz să scoborâm din centrul O perpendiculara Op , precum o prelungim până ce atinge sfera în punctul P , care este polul fetei. - Observăm că acest pol se găsește la intersecția a două cercuri: xPz , care reprezintă urma pe sferă a planului ce trece prin xz și P și care

tace planul de proiectiune după bisectrița $x'x'$ a unghiului azelilor xx' și yy' ; și xPz , a cărui proiectiune trebuie să o determinăm. Primul cerc xPz fiind normal planului de proiectiune, și făcând un unghi de 45° cu cercul de origine, se proiectează după diametrul de 45° între x și y . - Pentru a determina proiectiunea cercului xPz , trebuie să determinăm mai întâi inclinarea sa către planul de proiectie; pentru aceasta observăm că măsurând diedrul xy , găsim unghiul normalelor la fetele ce formează diedrul, luând suplimentul acestui diedru. Insa

planul cercului de proiectie împarte în două
partii egale atât diedrul cât și unghiul nor-
malelor, așa ca, una din aceste jumătăți
 $P'OP$, reprezintă inclinarea cercului $xP\bar{x}$



către planul de projec-
tione. Atunci vom ca-
bate cercul $xP\bar{x}$ în ju-
rul lui $P'P''$; punctul P
va căde pe circonferin-
ta cercului de proiecti-
une la o distanță de la
extremitatea diametru-
lui de 45° spre x , egală
cu jumătatea unghiun-

lui normalilor la fel ca formarea diedrului xy .
Vom face dar următoarea construcție:
vom duce diametrul de 45° între x și y și
plecând de la extremitatea a a acestui dia-
metru, vom lua arcul am egal cu juma-
tatea unghiului normalilor și apoi vom uni
pe m cu b unde a venit punctul de vedere;
care este extremitatea diametrului de 45° per-
pendicular pe aa'; - obținem atunci cu aa'
intersecția p. Prin $x, p, \bar{x}$ facem să treacă
un cerc mare, care reprezintă proiectia cer-
cului $xP\bar{x}$. Atunci punctul p reprezintă proiectia

polulul P al fetei xyz (111). -

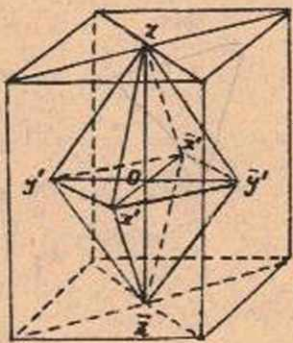
În același mod se vor obține proiectiile polilor celorlalte fete. -

B) Modificatii pe unghiuri.

Modificatiile ce putem face pe unghiuri sunt de două feluri: a) Modificatii Simetrice și b) Modificatii disimetrice. -

a) Modificatii simetrice.

Prin aceste modificatii se obține o singură formă care este: Octaedrul invers.

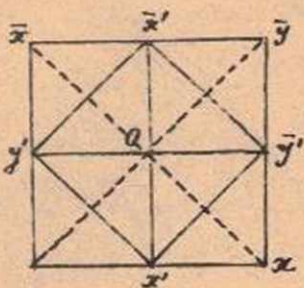


care se obține înlocuind unghiurile solide ale prizmilor trilaterice prin fete care să aibă pe muchiile concurențe lungimi proportionale cu aceste muchii. Se obține un solid octaedric, care se numește Octaedrul invers fiind că e dispus vs. a. vis

de axe invers de cât Octaedrul direct. Simbolul său va fi: $\bar{b}^{\frac{1}{2}} \bar{b}^{\frac{1}{2}} \bar{h}^{\frac{1}{2}}$ sau $\underline{a}^{\frac{2}{2}}$, și fiind că $x = z$ avem notația: $\underline{a}^1$. - -

Dupa Naumann acest Octaedru se numește Deutropiramida, caracterizat prin raportul

parametric: $oa : a : c$. Aceasta piramida este dispusă astfel încât muchiile bazei sunt paralele cu axele orizontale ale lui Hermann și unesc prin urmare extremitățile axelor lui Descartes. Notatiunea sa va fi: Poo. - și dacă considerăm raportul parametric general:



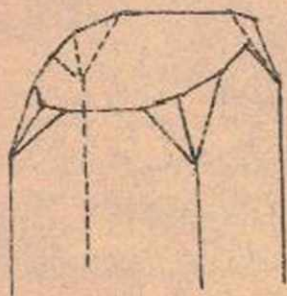
$oa : na : mc$ sau: $oa : a : \frac{m}{n} c$ vom avea notatiunea: $\frac{m}{n} Poo.$

Notatiunea după Miller este: $\{011\}$ sau: $\{Omn\}$.
— Pentru a obține proiecțiunea polilor fetelor de Deutropiramida, procedăm ca pentru Protopiramida. Însă polii nu se mai găsesc pe diagonalele de 45° , dar pe axele: xx' și yy' . Pentru a determina pozițiunea lor, observăm că, polii fetelor de Deutropiramida se găsesc la intersecția cercului care trece prin xx' și polii protopiramidei cu axa yy' , sau a cercului ce trece prin yy' și polii protopiramidei cu axa xx' .

6). Modificată disimetrică.

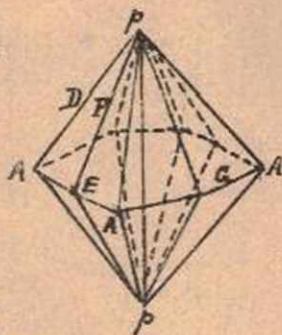
Aici vom obține încă o singură formă, care este: Diocaedrul, care rezultă prin

înlocuirea unghiurilor solide a protoprizmei prin
câte două fete,



fiecare luând
pe cele trei mu-
chi distanțe
diferite, așa
ca simbolul
este: $b^{\frac{1}{2}}b^{\frac{2}{3}}b^{\frac{3}{2}}$.

Se obține ast-
fel un solid

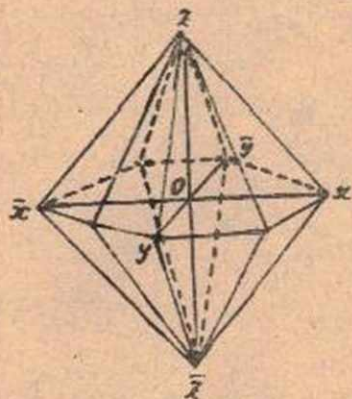


de formă piramidală cu bază de Octogon; el are:
16 fete care sunt niste triunghiuri scalene egale;
apoi 10 unghiuri solide, din care 2 unghiuri
culminante p de câte 8 fete, 4 unghiuri laterale
A de câte 4 fete și alte 4 unghiuri laterale E for-
mate tot din câte 4 fete, deosebite însă de cele
precedente. Muchiile în număr de 24 sunt de
trei feluri: 8 muchii laterale G, 8 muchii cul-
minante mai lungi D și alte 8 mai scurte F. —

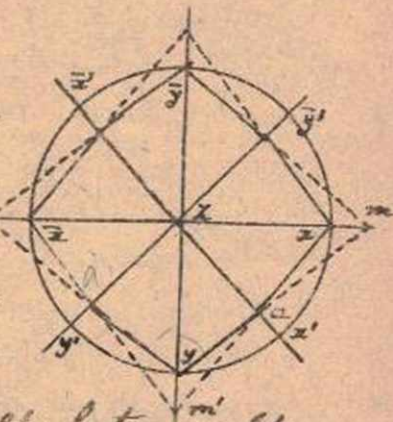
— După Naumann acest solid se numește:
Piramida ditetragonală și corespunde rapor-
tului parametric: $a : ma : nc$, de unde no-
tatimea: nPm . După Miller: $(mn\ n\ m)$. —

— Pentru proiecția polilor fetelor piramidei
ditetragonale, observăm că: dacă considerăm
fetele: xym și $xx'm'$ care au distanțele: $Om = m$,
 $Oy = 1$, $Oz = 1$ și $Om' = m$, $Ox = 1$, $Oz = 1$. Acaste fete

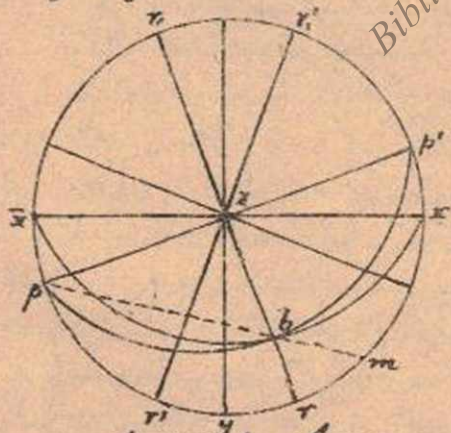
cu intersecția za , care se găsește în planul care trece prin



zx și axa binară de a doua specie. Aceasta muchie se va proiecta după za și dă o continuare



în același mod pentru celelalte fete, se obțin 8 triunghiuri scalene, care muchia za e mai scurtă de cât zx sau zy . - Pentru acestor fete se vor proiecta în intersecția acestor triunghiuri;



Ei se găsesc la intersecția a două cercuri, din care, unul trece prin axa zx , și se proiectează după un diametru al cercului de proiecție și altul care trece prin zy , inclinat către cercul de proiecție. Dacă considerăm fetele zya , observăm că: măsura

diedrului zy , suplementul său va fi unghiul normalelor la fetele zya și zya' ; fiind că

aceste fețe sunt tot una de inclinate către x și $\bar{x}$, planul $xy\bar{z}\bar{y}$ împarte în două părți egale acest unghi al normalilor. Una din aceste părți va reprezenta deci, unghiul ce face planul ce trece prin xx și polul feței cu planul $xy\bar{z}\bar{y}$. Atunci, plecând de la y , luăm la dreapta și la stânga două arcuri: yr și $y\bar{r}$ egale cu jumătatea suplimentului diedrului xy , și ducem diametrele $r\bar{z}r$, și $r'\bar{z}r'$, care reprezintă proiectiile cercurilor care trec prin xx și poli fețelor. Pe aceste diametre trebuie să determinăm punctele unde se proiectează poli fețelor. - Să cântărim atunci proiectiunea cercului care trece prin xx și pol, care e inclinat de un unghi dat către planul de proiectiune. Măsurăm atunci diedrul ya , a cărui supliment ne dă unghiul normalilor la fețele ce formează acest diedru, adică la xya și $\bar{x}ya$. Și fiind că planul de proiectiune împarte în două părți egale acest unghi al normalilor, una din aceste jumătăți va reprezenta inclinarea cercului care trece prin xx și pol, către planul de proiectiune. Deci: dacă rabatem cercul care trece prin xx și pol, în jurul diametrului rr , este evident că punctul de vedere

va veni la extremitatea p a diametrului perpendicolar și polul va căde pe cercul de proiectie la o distanță om egală cu jumătatea suplimentului diedrului $\gamma\alpha$. Dea, plecând de la r , vom lua spre x un arc rm egal cu jumătatea diedrului suplimentar lui $\gamma\alpha$ și unind m cu p vom obține cu diametrul rr , intersecția b care reprezintă proiectia polului fetei $\gamma\alpha$. Cercul xbx reprezintă proiectia cercului care trece prin xx și polul fetei. --

În mod analog vom găsi proiectiunea polilor celorlalte fete. --

Fata $\gamma\alpha$ corespunzând raportului parametric: $ma : a : nc$, va avea notatiunea $(n m m)$.

C. Modificator pe muchile laterale.

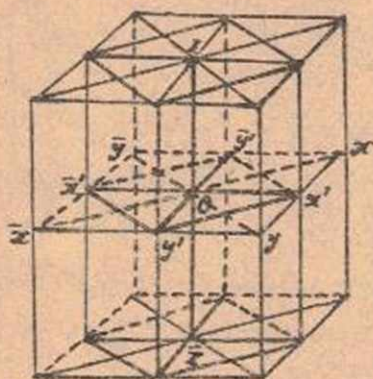
Și aici avem două feluri de modificat: Simetrice și disimetrice. --

a). Modificat simetrice.

Accastă modificare ne conduce la:

Prizma inversă care se obține din prizma fundamentală, înlocuind muchile laterale prin o fată paralelă cu această muchie și interceptând pe muchile baze distanțe egale. Simbolul acestor fete va fi: $b^{\frac{1}{2}}b^{\frac{1}{2}}h^{\frac{1}{2}}$ sau: h' . --

Fiindcă sunt patru muchii, vom obține 4 fețe



care vor forma prismă în-
versa, corespunzând octa-
edrului invers. Aceste fețe
secundare unesc mijloac-
ele muchiilor laterale opuse.

După Naumann această
prismă se numește: Deutero
prismă și corespunde ra-
portului parametric:

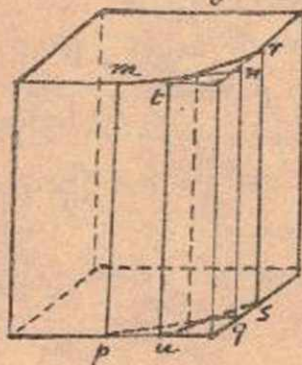
$a : \infty a : \infty c$, de unde nota-

tia: ∞P_{∞} . Pentru notatia în indici avem: (100). -

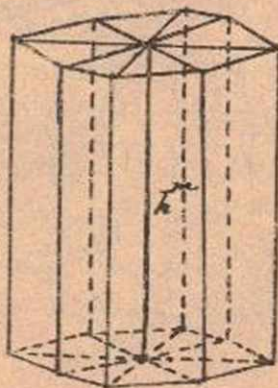
— Proiecția polilor fețelor deuteroprismei
este simplă. Poli se găsesc la extremitățile
axelor binare de prima specie, adică: în
 x se proiectează fața (100), în y fața (010) etc.

b) Modificații disimetrice.

Avem o singură modificare care ne conduce



la Prismă
Octogonă
care se ob-
ține înlocu-
ind muchi-
ile laterale
prin câte do-
ca fețe cu



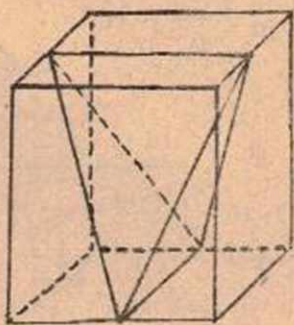
sunt egal inclinate. Asa: planul: $mnpq$ paralel cu muchea h , iar pe o muche bazica o distantă $\frac{1}{n}b$ și pe cea - l - alta $\frac{1}{n}b$. Trebuie un alt plan $rstu$ care să iasă pe prima muchie distantă $\frac{1}{n}b$ iar pe a doua: $\frac{1}{n}b$. Se obține astfel o prismă care are ca bază un octogon simetric, dar nu regulat. Simbolul e: $b^{\frac{1}{n}}b^{\frac{1}{n}}b^0$ iar notațiunea este: $h^{\frac{1}{n}}$. —

— După Naumann acest solid se numește: Prisma ditetragonală, și corespunde raportului parametric: $a:na:\infty c$, iar notațiunea este: ∞Pn . După Miller: $(n10)$. —

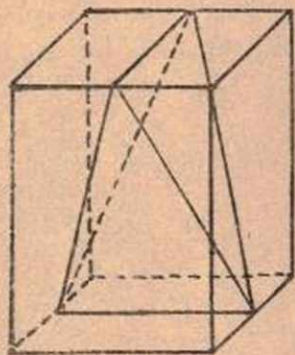
— Polii fetelor prisme ditetragonale se proiectează pe circumferența cercului de proiecție la extremitatea diametrelor corespunzătoare fetelor piramide ditetragonale. —

II. Forme Hemiedrice.

A. Dacă înlocuim muchile bazice alterne ale



prisme patratică prin câte o față, obținem un tetraedru cu fețele de triunghiuri isocelă și care se

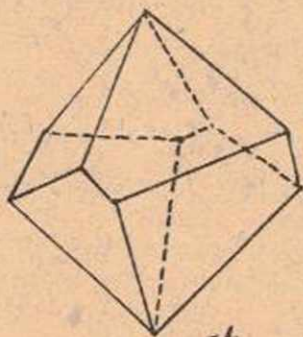


numeste: Sfenocedru. Notatia celor doua sfenocedre va fi: $\pm \frac{1}{2} b^2$. -

- Dupa Naumann sfenocedrul se obtine prin dezvoltarea fetelor alterne ale Protopiramidei asa ca notatiunea va fi: $\pm mP$. -

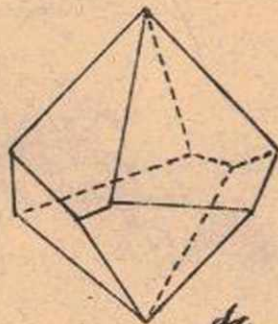
Dupa Miller avem notatiunea: $K(mms)$ & $K(\bar{m}\bar{m}\bar{s})$.

B. - Daca in prisma patratica inlocuim



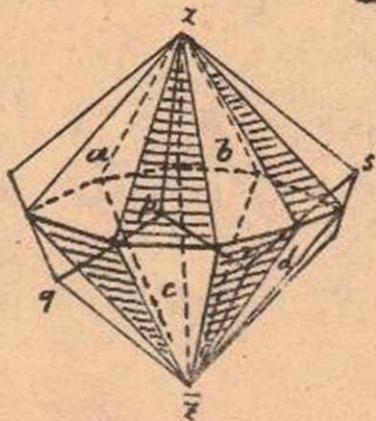
st.

unghiurile
solide prin
cate doua
fete si lasam
sa se dezvolt
te fetele al
terne, obti
nem un so
lid cu 8 fete
trapezoida



dr.

le care se fac dupa un Octogon in fig. 299. Sunt
doua solide: unul pozitiv si altul negativ,
care se numesc: Hemidioctaedre si au ca nota-



tie: $\pm \frac{1}{2} [b^2 b^2 h^2]$. -

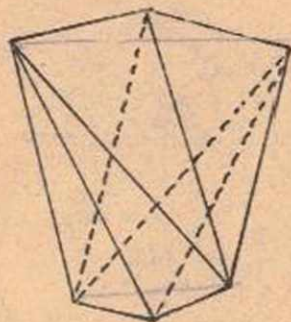
- Pentru a obtine aceste so
lide dupa Naumann, vom
considera piramida ditetra
gonala in care facem sa se
dezvolte fete alterne in pi
ramidele de sus si jos. Asa:

fetele a și b a piramidei Superioare se taie după muchia zp, iar cu fetele c și d a piramidei inferioare se taie după muchiile în fig. 7ag: pq, pr și rs, care trec prin vârurile octogonului de bază. Se obține astfel un solid numit de către Naumann: Trapezocedru tetragonal. Sunt două solide: unul drept și altele stâng, a căror notatiune este:

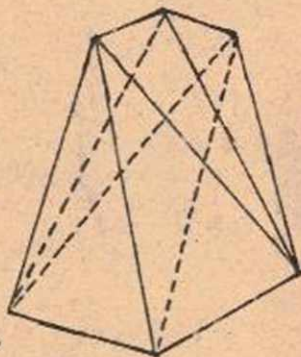
$$\frac{n P m d}{2} \text{ și } \frac{n \bar{P} m st}{2}$$

După Miller: $\pi(m \mid \frac{m}{n})$ și $\pi(m \mid \frac{m}{n})$. -

C. - Dacă înlocuim muchiurile alterne ale prismei tra-



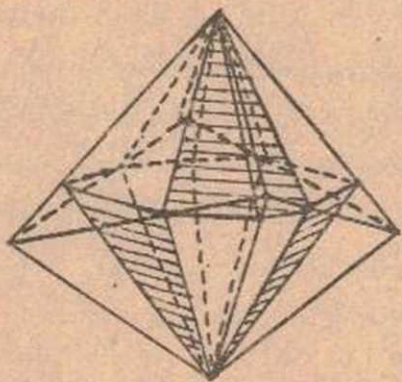
tratică prin câte două fețe, se obține un solid cu 8 fețe, care sunt miste triunghiuri scalene, având forma unui



sfenocedru a căruia fețe au fost împărțite în două părți. Pentru aceasta se numește: Disfenocedru. Notatiunea sa este: $\pm \frac{1}{2} (6^{\frac{1}{2}} 6^{\frac{1}{2}} 6^{\frac{1}{2}} 6^{\frac{1}{2}})$. -

Pentru a obține acest solid după Naumann

plecăm direct de la piramida ditetragonată dezvoltând fațetele al-
terne de fete sus si jos.



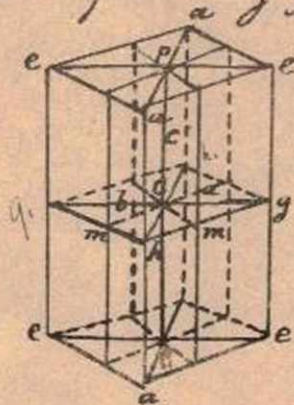
El numeste: Scalenoedru tetragonal, si fiind ca
sunt doua de aceste soli-
da: unul pozitiv si altul
negativ, notatiunea ge-
nerala va fi:
 $\pm n.P_{100}$.

Dupa Miller vom ave no-
tatiunea: $K(m \pm \frac{m}{n})$ si $K(m \mp \frac{m}{n})$. — —

III

Sistemul Ortorombic.

Dupa Levy, forma primitiva a acestui sistem
este: Pirama dreapta cu
baza de romb, care are 6
fete din care: doua baze p
care sunt niste romburi
si 4 fete laterale, care sunt
niste dreptunghiuri m. —



Unghiurile solide în număr de 8 sunt de două specii: 4 unghiuri a corespunzând unghiurilor obtuze a romburilor de bază și 4 unghiuri e, corespunzând unghiurilor ascutite. - Muchiile în număr de 12 sunt de trei feluri: 8 muchi orizontale b egale, bazei, 2 muchi laterale verticale h, corespunzând diedrelor obtuze și 2 muchi laterale g, corespunzând diedrelor ascutite. -

De ordină se așază prismă așa ca: diagonala bazei care reunește unghiurile e să fie dirijată de la stânga la dreapta și ca diedrul obtuz h să fie în față. -

Pentru a obține elementele de simetrie se face să treacă planuri prin mijlocurile muchilor bazei opuse, care se tăie după dreapta pp', care este axa principală și de simetrie binară. Un al treilea plan care trece prin mijlocul muchilor laterali opuse, întâlnește pe cele două d'întâi după dreptele mm' și nn', care unesc mijlocurile fețelor opuse; - aceste axe sunt de simetrie binară și se numesc: axe secundare de prima specie.

Două alte planuri care trec prin două muchi laterali opuse, întâlnește planul orizontal după două drepte: gg' și hh', care sunt axe

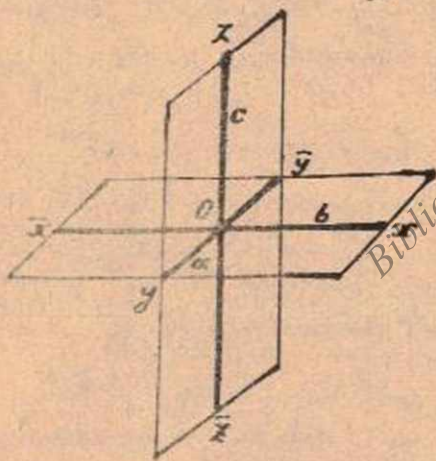
de simetrie binară și se numesc: axe secundare de a doua specie. Ele sunt bisectrițele unghiurilor formate de axe de prima specie. În fine, toate aceste axe se întâlnesc într-un punct comun C, care e: centrul de simetrie.

Deci: elementele de simetrie ale sistemului ortorombic sunt: $3P^2$, $3P^{12}$, C, $3L^2$, $3L^{12}$.

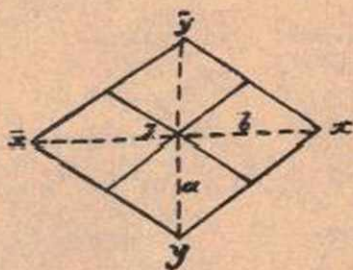
Notatiunea prizmei Ortorombice după Levy este: p.m. -

Pentru a defini acest sistem, pe care-l numește Rombic, Hermann admite trei axe, din care: una verticală $\bar{z}$, pe care o numește axa principală, și două axe orizontale dreptunghiulare între ele și în raport cu axa principală, însă neegale: cea mai mare: $\bar{x}$ se numește macrodiagonală,

și corespunde diagonalei mari a rombului de bază a prizmei ortorombice, și alta mai mică $\bar{y}$ numită brakidiagonală și corespunde cu diagonala mică a bazei. - Aceste axe corespund cu axe secundare de a doua specie a lui Levy. - Parametrii corespunzător acestor



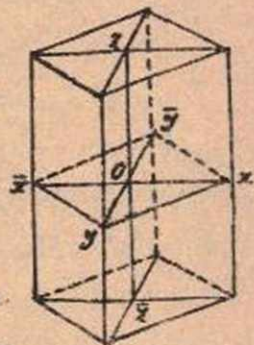
trei axe sunt totu trei diferite si sunt notati:



a pentru brăzidială, b pentru înălțimea diagonală și c pentru axa principală. —

Raportul parametric corespunde celor trei axe, pe care Naumann o numește: Protoprismă

este: $a : b : c$. care conduce la notatiunea: ∞P . — Fetele protoprimei ating axele laterale la extremitate și sunt paralele cu axa principală. —

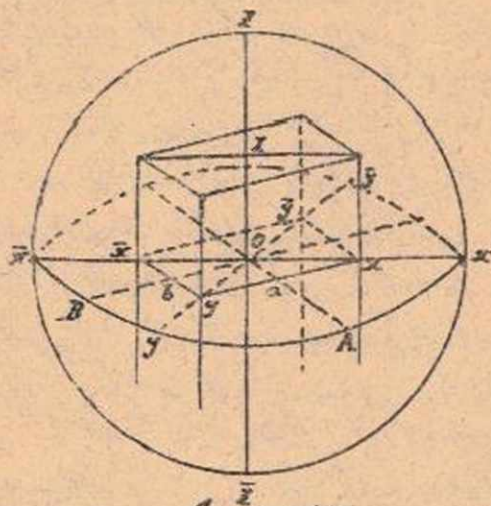


Cele două baze ale prismei, care sunt cele două fețe ale Basipinco-
dului, corespund raportului parametric: $\infty a : \infty b : c$, sau dacă le considerăm trecând prin centru: $a : b : 0c$, de unde notatiunea OP .

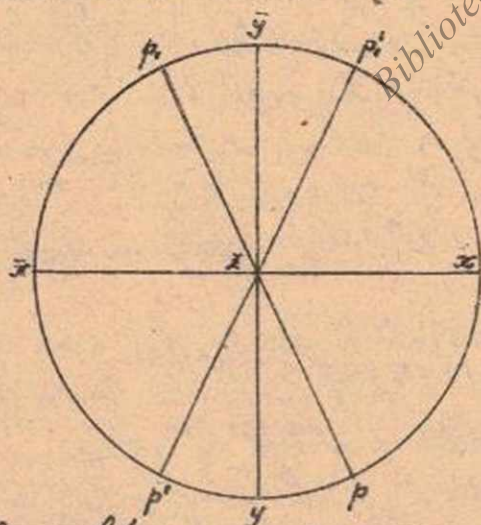
Dupa Miller, care admite aceleasi axe ca și Naumann, vom avea pentru fețele prismei: (110) și pentru basipinacoid: (001) . —

— Pentru proiectiunea polilor fețelor diverselor forme ale sistemului Octoic, consi-

derăm planul de proiectiune continuând cele
doua axe orizontale: xx
și yy , macro și brachidi-
agonală, pe când zz
este diametrul perpen-
dicular pe planul de
proiectiune și trecând
prin centru. - Dacă con-
siderăm prismă în-
scrisă în sfera de pro-
iectiune, constatăm că,
poți fetelor se vor găsi

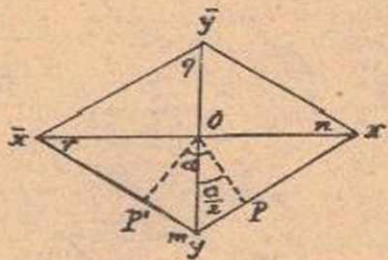


pe circumferința cercului de proiectiune, dar
nu la extremitățile bisectrițelor unghiurilor
axelor. În adevăr: dă-
că considerăm secțiun-
ea mnqr, care trece
prin centrul O al priz-
mei și dacă din centru
ducem normalele OP
și OP' pe fețele mn și
m'r, care formează
diedrul obtuz, unghiul
 α al acestor normale
este suplimentul diedru-
lui obtuz m, iar $\frac{\alpha}{2}$ este unghiul ce face axa



luc obtuz m, iar $\frac{\alpha}{2}$ este unghiul ce face axa

yy cu una din normalele la fetele considerate, fiind că unghiul m e mai mare de cât 90° , rezultă că α e mai mic de cât 90° și deci: $\frac{\alpha}{2} < 45^\circ$. Prin urmare: $\angle OP' > 45^\circ$ și OP nu este bisectrița lui yOx .



Pentru a obține dar proiectiunea polilor fetelor de prizmă, plecând din y luăm spre x arcu yp egal cu $\frac{\alpha}{2}$, și în p se va afla polul fetei m a prizmei. Luând la stanga arcu yp' egal cu yp , vom avea în p' polul fetei m' . Ducând diametrele pp' și $p'p$, vom obține poli p, p', p, p' a celor patru fete a prizmei. — Este evident că poli fetelor de bazipinacoid se proiectează în x . —

— Prin modificări asupra elementelor prizmei ortorombice vom obține, sau: Forme holoedrice sau forme hemiedrice. —

I. Forme holoedrice.

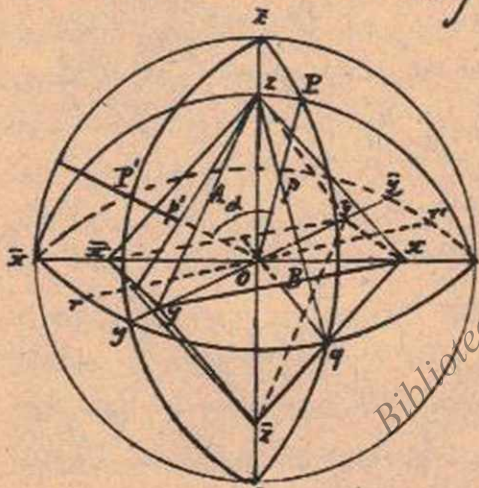
Aceste forme se obțin prin mai multe feluri de modificări: Pe muchile bazei, pe muchile laterale sau pe unghiuri; și care putând fi: simetrice sau disimetrice. —

Protopiramide, corespunzătoare raportului parametric: $a : b : mc$ și notatunii: mP .
Când $m > 1$ avem piramide ascuțite, și pentru $m < 1$ piramide obtuze. -

Pentru notatiunea după Miller vom avea:

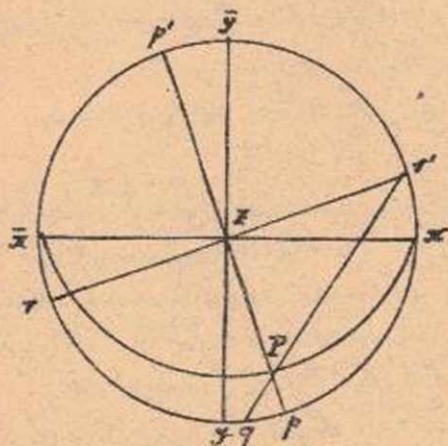
(111) sau $(m \ m \ 1)$. -

- Pentru a avea proiectiunea polilor fațelor Protopiramidei, vom considera acest solid înscris într-o sferă de proiectiune, și să căutăm proiectiunea polului fetei xyz . -



Fie OP normala la această față care atinge sfera în punctul P . Acest punct se găsește la intersecția a două cercuri mari: zPz și xPx . Va trebui dar să determinăm proiectiile acestor două cercuri. Pentru această observăm că: normalele la fațetele xyz și $x-bar y-bar z-bar$, care determină muchia A formând unghiul α , care este suplementul unghiului A și deci: α va reprezenta unghiul pe care-l face planul ceroului zPz cu zPx . Plecând deci de la y , pe cerul de proiectie, vom lua spre x arcul $yp = \frac{\alpha}{2}$ și vom duce diametrul pp' , care

reprezintă proiecția cercului xPz . — De asemenea



normalele la fețele xyz și $xy\bar{z}$, care formează dihedrul B , dau unghiul β , care este suplimentul lui B ; atunci β reprezintă unghiul de care normala OP este înclinată către planul de proiectiune. Dacă rabatem cercul $qPzq'$ în jurul lui qq' , punctul de vedere vine în r' , ex-

trimitatea diametrului rr' perpendicular pe qq' , iar punctul P se va rabate pe circumferența cercului de proiectiune la o distanță $qp = \frac{\beta}{2}$ de la q spre y . Deci: în planul de proiectie, plecând de la p spre y , vom lua arcul $pg = \frac{\beta}{2}$ și unind g cu r' , vom obține cu pp' intersecția P' ; prin x, P' și $\bar{x}$ facem să treacă un cerc mare, care reprezintă proiecția lui $xP\bar{x}$, iar punctul P' reprezintă proiecția polului feței: $xyz(III)$. —

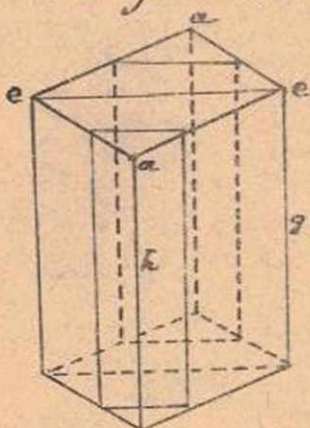
B. Modificări pe muchele laterale.

Aici vom avea două feluri de modificări: a) Simetrice și b) Disimetrice. —

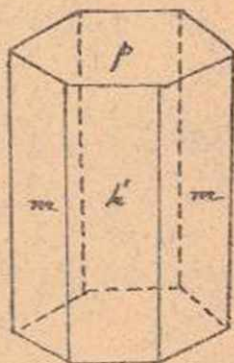
a). Modificatii simetrice.

Ele sunt de două feluri:

1) Modificatii pe muchile h . Înlocuim cele



două muchii
prin câte o fa-
ta paralelă
cu ele și care
să intersecteze
muchile bazei
corespunzătoare,
distanțe
egale. Vom ob-
ține deci două



fete, a căror simbol este: $b^{\frac{1}{2}} b^{\frac{1}{2}} h^0$ sau: h' .

După Naumann aceste fete se cheamă: fete
de Pinacoid; ele sunt paralele cu macrodia-
gonala și corespund raportului parametric:
 $a : \infty b : \infty c$, de unde notatiunea: $\infty P \infty$, și
se numesc fete de Macropinacoid.

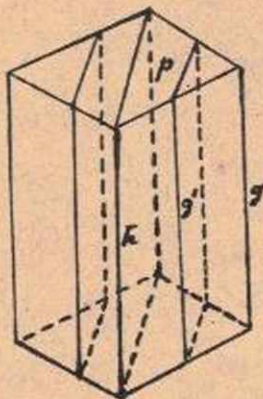
Notatiunea după Miller va fi: (100).

— Polii fetelor Macropinacoidului se proiectează
în xy și $\bar{y}$, fiind perpendiculare pe yz .

2) Modificatii pe muchile g . — Aceste

modificatii, care se fac în aceleași condițiuni
ca și acele de pe muchile h , ne dau două fete
verticale paralele cu muchile g , având ca

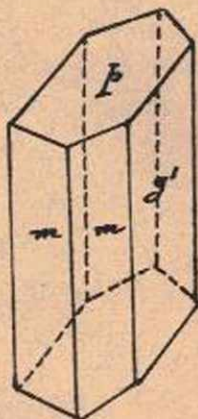
Simbol: $b^{\frac{1}{2}} b^{\frac{1}{2}} g^{\frac{1}{2}}$ și notațiunea: g' . --



După Naumann,
aceste fețe fiind
paralele cu bra-
hi diagonală
corespund ra-
portului pa-
rametric:

$$a : b : c$$

se numesc
fețe de: Bra-

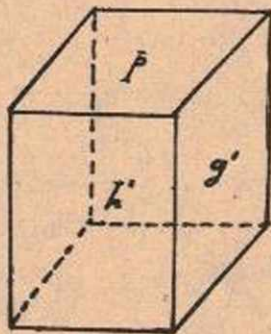


hipinacoid și an ca notațiune: $\infty P\infty$. --

După Miller avem notațiunea: (010). --

— Polii fetelor de Brachipinacoid se proiec-
tează în x și $\bar{x}$.

Dacă considerăm în același timp modifica-



țiile pe muchile h și g , vom
obține: o prismă dreaptă
cu bază de dreptunghi, a
cărui notațiune va cuprinde
pe acea a celor trei pinacoizi
 p , h' și g' . — Elementele sale sunt:
două baze p , două fețe late-
rale h' și alte două g' , care sunt
miste dreptunghiuri. Apoi:

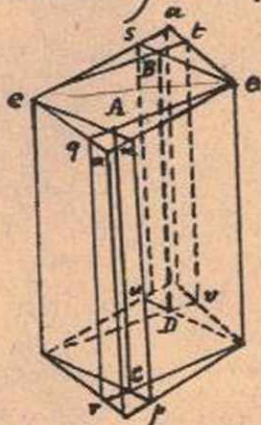
8 unghiuri solide egale și 12 muchii din care:
4 muchii bazei scurte, 4 muchii bazei lungi

și 4 muchi laterale. -

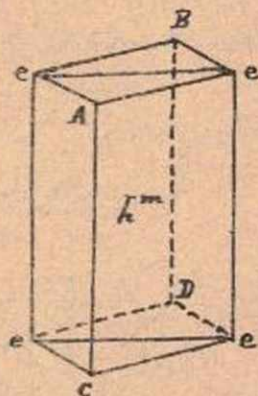
b). Modificatū disimetrice. -

Ele sunt de două feluri:

1). Modificatū pe muchile h . Să înlocuim



muchile h prin
câte două pla-
nuri așa ca:
fiecare fiind
paralel cu h
Să ice pe o mu-
che bază o
lungime in-
traga și pe
cea-l-altă



o lungime mai mică. Vom înlocui muchia h
prin două fete, a căror simbol va fi: $b'b'h^2$ și
notațiunea: h^m . -

Se obține astfel un prizma rombică lungită
după diagonală mare. -

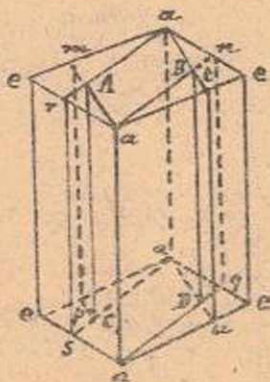
După Naumann această prizma corespunde
raportului parametric: $a : mb : oc$ și fiind că
e lungită după macrodiagonală, se numește:
Macroprizma, a cărei notațiune va fi: oPm . -

După Miller notațiunea este: $\{m10\}$. -

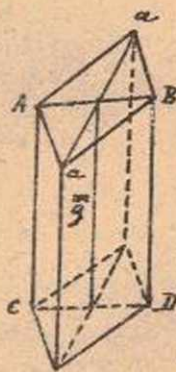
— Proiecțiunea polilor fetelor de Macroprizma
se va face ca pentru Protoprizma. Insa fiind că

fetetele ating axa xx' la o distanță mai mare de cât unitatea, urmează că, perpendicularele scosorâte din centru pe aceste fete vor atinge circumferența cercului de proiecțiune în puncte cuprinse între proiecțiunea polilor fetelor de Protoprisma și poli fetelor de Macrospinacoid; acestu poli vor fi cu atât mai apropiați de axă cu Macrospinacoidului, cu cât prisma va fi mai lungită după macrodiagonală. —

2). Modificatii pe muchile g : Dacă fa-



cem pe muchile g aceeași modificare simetrică ca pe muchile h , vom obține: o prismă rombică simetrică după diagonală nn' .



că, a cărei simbol este: $b' b' g' g'$ sau notatia: g^m .

După Naumann această prismă corespunde raportului parametric: $ma : b : oc$, se numește Brachiprismă și are ca notatie: $\infty P m$. —

După Miller avem: $\{1 m 0\}$. —

— Poli fetelor brachiprismelor se proiectează

între poli fetelor Protoprizmei și poli fetelor de Brachiprismă.

C. Modificări pe Unghiuri.

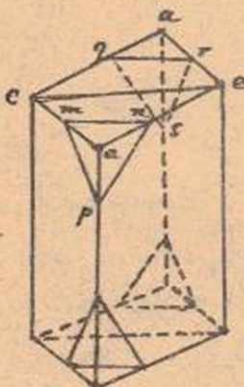
Vom avea și aici două feluri de modificări:

a) Simetrice și b) Disimetrice.

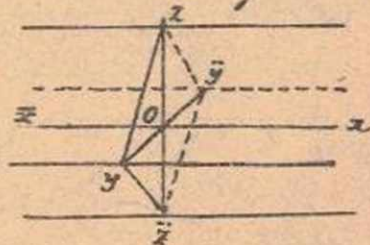
a). Modificări simetrice.

Ele au loc:

1^o. Pe unghiurile α . Înlocuim cele patru



unghiuri α ale Protoprizmei prin fețe care au formă de romb.

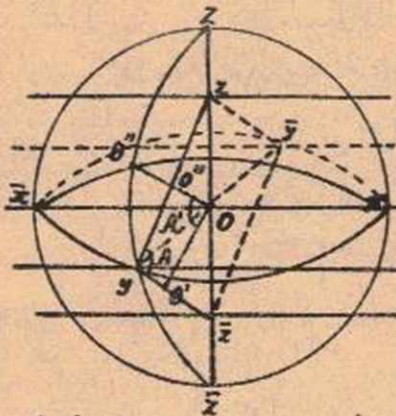


Se formează aceste unghiuri, distanțe proportionale cu lungimile lor. Se obțin astfel patru fețe a căror notatiune este: $b^{\frac{1}{2}}b^{\frac{1}{2}}h^{\frac{1}{2}}$ sau α^2 . Aceste fețe prelungite până la intersecția lor formează un solid prismatic deschis la ambele capete, a căruin muchii vor fi orizontale și paralele cu diagonala mare a rombului de bază. După Deby acest solid nu are un nume propriu.

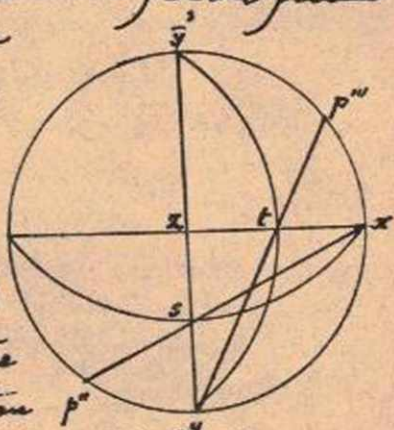
După Kammann aceste fețe corespund rapor.

tului parametric: $a:ob:mc$ și au ca nota-
țiune: $mP\bar{o}$. - Solidul se numește Macrodomă
După Miller avem notația: ($m01$). -

- Pentru a determina proiecția polilor
fetelor Macrodomăi, observăm că: fetele fiind



aplicate pe
 Y și Z , pa-
ralel cu
 XX , poli-
lor se vor
proiecta pe
 $Y\bar{Y}$ într-o
linie $Y\bar{Y}$. Pentru P'

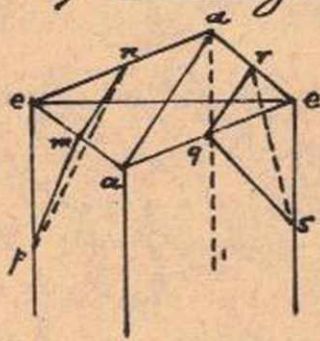


a determina proiecțiunea lor, să considerăm o sec-
țiune în acest solid prin un plan care trece
prin $Z\bar{Z}$ și $Y\bar{Y}$, perpendicular pe macrodia-
gonala. Această secțiune este un romb. Să mă-
surăm unghiul $\angle Y\bar{Z}$ a fetelor macrodomăi.
Fie A valoarea acestui unghi și A' unghiul
normalilor la fetele considerate; atunci A'
reprezintă înclinarea cercului care trece prin
 XX și pol, în raport cu planul cercului de
proiecțiune. Dacă rabatăm cercul $Y\bar{Z}$ în ju-
rul lui $Y\bar{Y}$, este evident că polul fetei macro-
domăi se va găsi pe circumferența cercului

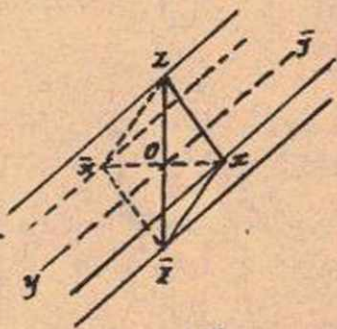
de proiectiune în un punct p'' la distanța $yp'' = \frac{A}{2}$, punctul de vedere fiind în x . Dacă unim p'' cu x , vom obține cu yy o intersecție s , care reprezintă proiectia polului fetei de macrodomă. —

Fiind că valoarea lui m variază, este evident că: pentru $m > 1$ vom avea macrodome ascutite și poli lor se vor găsi cuprinși între acei ai macrodomei principale și a macropinacoidului; pe când pentru $m < 1$ vom obține solide obtuze a căror poli vor fi cuprinși între poli macrodomei principale și bazipinacoid. —

2.) Pe unghiurile e . Dacă facem pe unghiur.



ile e aceleas
modificată
ca și pe un-
ghiurile a
se obține un
Solid prism-
tic orizontal
a căru fete

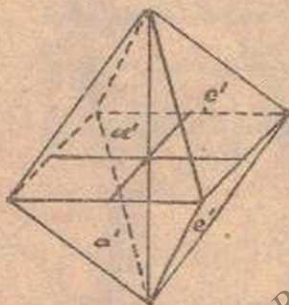


vor fi paralele cu diagonala mică a bazei, și vor
ave ca notațiune: $b^{\frac{1}{2}} b^{\frac{1}{2}} q^{\frac{1}{2}}$ sau e' . —

După Naumann Solidul corespunde raportu-
lui parametric: $a : b : mc$, și are notațiunea
 $mP\infty$. — Fiind că fetele sunt paralele cu
brachidiagonala, Solidul se numește Brachidomă

După Miller avem notațiunea: (0 m 1). —

— Proiecțiunea polilor fetelor Brachidomei se face ca și la Macrodomei. Polii se găsesc proiectați pe axa xx' . Pentru brachidomele ascuțite polii se găsesc cuprinși între axa și brachidomei principale și a brachipinacoidului; pentru brachidomele obtuze polii sunt cuprinși între axa și brachidomei principale și a brachipinacoidului.

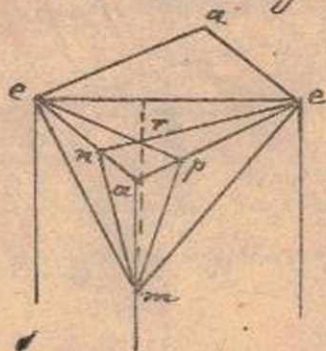


Dacă considerăm în același timp modificățiunile pe unghiurile a și pe unghiurile e , atunci obținem un Octaedru cu bază de dreptunghi, care corespunde prismei cu bază de dreptunghi. —

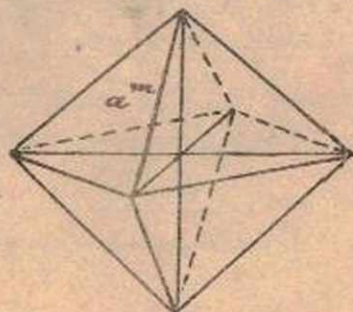
b). Modificățiuni disimetrice.

Ele pot avea loc:

1). Pe unghiurile a . Să considerăm fetele



mne și mpe, care intersecționează pe axa prin puncte diferite. Dacă luăm această



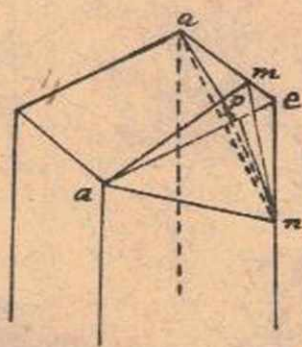
modificare pe cele 4 unghiuri a obținem un Octaedru lungit în sensul diagonalei mari a bazei, a cărei notațiune este: $b^{\frac{1}{2}} b^{\frac{1}{2}} h^{\frac{1}{2}}$. —

— După Naumann aceste Octaedre corespund raportului parametric: $a:mb:mc$ și se notează mPn. Ele se numesc: Macropiramide. —

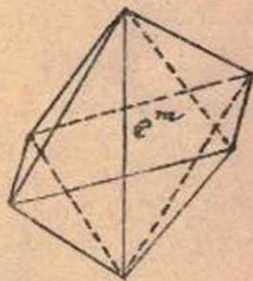
După Miller avem notațiunea: (mn, m, n) . —

— Pentru proiectiunea polilor fetelor macropiramidei, întrebuințăm aceeași metodă ca și pentru Protopiramida; însă observăm că acești poli se vor proiecta pe diagonalele cuprinse între yy și diametrul corespunzător Protopiramidei.

2). Pe unghiurile e. Dacă facem pe unghiuri



e aceleași
modificati
și pe ungh
rile a, vom
obține fetele
notate: $b^{\frac{1}{2}} b^{\frac{1}{2}} g^{\frac{1}{2}}$
care vor forma
un Octaedru
lungit în sen
sul diagonalei mari a bazei: —



zul diagonalei mari a bazei: —

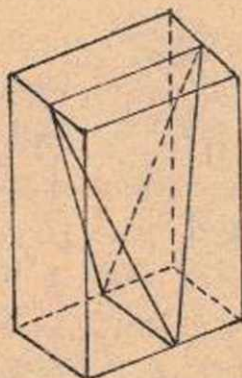
După Naumann acest Octaedru corespunde raportului parametric: $na:b:mc$ și are ca notațiune: mPn. Se numește: Brachipiramida.

După Miller avem notațiunea: (mmn). -

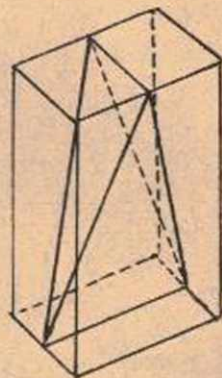
— Proiecțiunea polilor fețelor brachipiramidelor se va face ca pentru Macropiramide. Acești poli se vor găsi pe diametrele cuprinse între axa xx și diametrele pe care se găsesc polii Protopiramidelor.

II. Forme Hemiedrice.

Formele hemiedrice ale sistemului ortorombic se obțin numai prin modificări pe muchile alterne bazei



ce ale prizmei, prin planuri paralele cu aceste muchii. Se obțin astfel două forme, care se numesc Sphenoe-



noedre, sau Sphenoe rombici, din care, unul se numește: Direct sau Drept, și altul: Invers sau Stâng. Ei au patru fețe care sunt triunghiuri scalene. Muchiile în număr de 6 sunt de trei specii: 2 muchii lungi A, 2 mijlocii B și două scurte C. Notațiunea va fi: $\pm \frac{1}{2} b^m$.

— După Naumann pentru a obține aceste forme putem pleca de la Protopiramide precum

si de la Brahi sau Macropiramida, făcând să
se dezvoltă fețele alterne. Vom avea notațiunile:
 $\frac{mP_d}{2}, \frac{mP_{st}}{2}, \frac{mP_{\bar{n}d}}{2}, \frac{mP_{\bar{n}st}}{2}, \frac{mP_{\bar{n}dr}}{2}, \frac{mP_{\bar{n}st}}{2}$.

Tar după Miller avem:

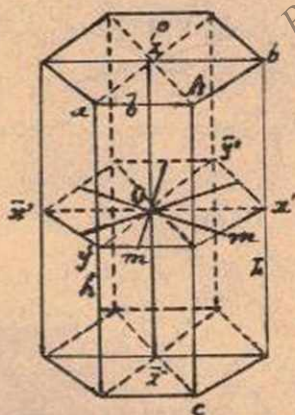
$$\pi(m\bar{m}1), \pi(m\bar{m}1), \pi(mmn), \pi(m\bar{m}n),$$

$$\pi(mn\bar{m}) \text{ și } \pi(mn\bar{m}). -$$

IV

Sistemul Hexagonal.

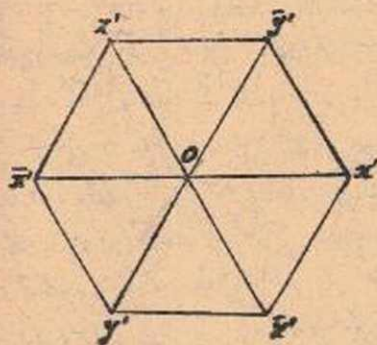
După Levy, forma primitivă a acestui sistem
este: Prizma hexagonală care are: 2 baze care



pală; ea se obține prin intersecția celor trei planuri

care trec prin câte două muchii laterale opuse. Dacă prin mijlocurile muchilor laterale facem să treacă un plan paralel cu baza, el tăie pe cele 6 alte trei planuri după trei drepte care sunt: axe de Simetrie binară. Aceste axe care sunt paralele cu muchile bazei ale prismei sunt: axele lui Levy. Însă Levy ne ia în considerare de cât două, care împreună cu axa principală reprezintă cele trei muchii care compun un unghiul solid al prismei. Așa avem axele: Ox' , Oy' , și Oz , paralele cu muchile Aa , Ab , Ac , care formează unghiul A . -

Sistemul de 4 axe este admis de Weiss și Bravais, așa că trebuie 4 parametri, din care: trei parametri egali, corespunzând axelor orizontale și al patrulea different, corespunzând axei verticale. Aceste sunt și axele lui Levy. Naumann admite de asemenea axele lui Weiss, însă nu consideră de cât 3 din care:

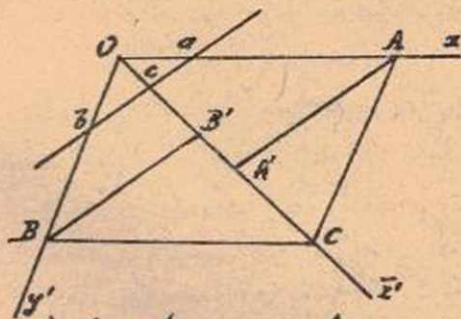


o axă verticală și două orizontale adiacente. Dacă considerăm planul hexagonului orizontal, atunci axele lui Weiss și Bravais sunt $x'x'$, $y'y'$, $z'z'$ împreună cu axa orizontală

care se proiectează în O . -

Naumann numeste acest solid Protoprisme și pentru a-l nota se observă de ce ca față aplicată pe extremitățile axelor x' și $\bar{x}'$ este paralelă cu axa verticală și va fi reprezentată prin raportul parametric: $a : a : \infty c$, de unde notațiunea: ∞P . - După Weiss, această față aplicată pe x' și $\bar{x}'$ este paralelă cu $y'y'$ și cu axa verticală, ceea ce da raportul parametric: $a : \infty a : \bar{a} : \infty c$, sau trecând la indici: $\frac{1}{1} : \frac{1}{\infty} : \frac{1}{1} : \frac{1}{\infty}$, de unde notațiunea după Bravais: $(10\bar{1}0)$. -

Dacă observăm valoarea indicilor în notațiunea lui Bravais, constatăm și putem demonstra că: indicele în valoare absolută corespunzător lui $\bar{x}$, este egal cu suma indicilor precedenți. Să considerăm cazul cel mai general, ca axele:



Ox', Oy', Oz' sunt tăcute de o față și să luăm: $OA = x'$, $OB = y'$, $OC = \bar{z}'$. Să construim pe OA și OB un paralelogram a cărui diagonală este OC . Să presupunem că față tăce axele în punctele a, b, c , interceptând distanțele: $0a = \frac{OA}{h}$, $0b = \frac{OB}{k}$, $0c = \frac{OC}{i}$, de unde:

$$h = \frac{OA}{Oa}, \quad K = \frac{OB}{Ob}, \quad i = \frac{OC}{Oc} \dots (1)$$

Prin punctele A și B să ducem paralele la urma ab, care vor întâlni pe OC în A' și B'. Vom avea:

$$OC = OA' + B'C \dots (2)$$

Insa triunghiurile BCB' și OAA' sunt egale caei au:

$\angle OAA' = \angle BCB'$ și $\angle AOA' = \angle BCB'$, așa că: $BC = OA$, deci vor avea și $OA' = CB'$. Înlocuind aceste valori în relațiunea (2) vom avea: $OC = OA' + OB'$. Împărțind prin Oc avem: $\frac{OC}{Oc} = \frac{OA'}{Oc} + \frac{OB'}{Oc} \dots (3)$

Insa avem: $\triangle Oca \sim \triangle OAA'$ și $\triangle Obc \sim \triangle OB'B'$ deci:

$$\frac{OA}{Oa} = \frac{OA'}{Oc} \quad \text{și} \quad \frac{OB}{Ob} = \frac{OB'}{Oc}$$

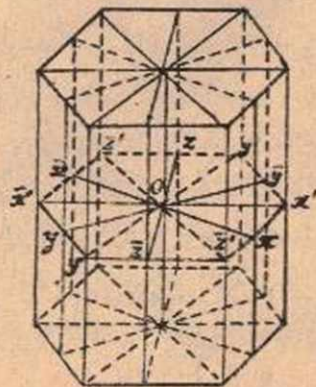
Înlocuind aceste valori în (3) vom avea:

$$\frac{OC}{Oc} = \frac{OA}{Oa} + \frac{OB}{Ob}$$

și înlocuind valorile din (1) avem:

$$i = h + K \dots$$

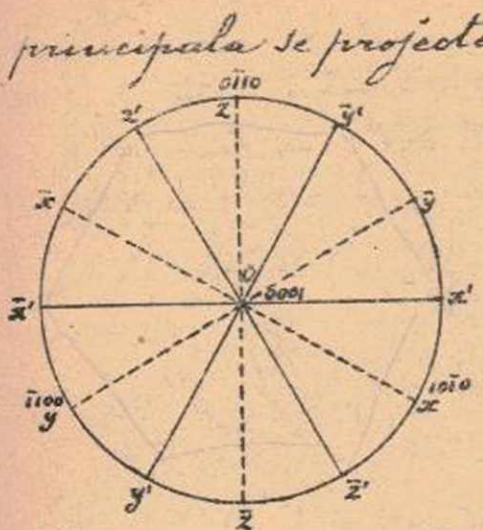
— Dacă în prizma hexagonală facem să treacă planuri prin axa principală și prin mijlocurile muchilor bazei opuse, obținem alte trei planuri de simetrie, care dau cu planul orizontal ce trece prin centrul prizmei



trei intersecțiuni, care sunt bisectrițele unghiurilor axelor lui Levy. Aceste intersecțiuni, care unesc mijloacele fețelor laterale opuse a prizmei, constituie un alt sistem de axe binare, care, împreună cu axa principală formează sistemul de axe de a doua specie. Ele sunt notate: xx , yy , zz și corespund cu axele lui Miller de la sistemul Triclinic; în raport cu aceste axe putem nota toate formulele, după cum vom vedea la sistemul Triclinic. Miller neadmitând sistemul hexagonal, nu vom avea a ne ocupa de notatiunea în sistemul său. — — —

— Băzele prizmei hexagonale a lui Levy, se numesc după Kaimann, fețe de Basipinacoid corespunzând raportului parametric: $a:a:c$ de unde notatiunea OP. După Weiss avem notatiunea: $\infty a : \infty a : \infty a : c$ sau în indici vom avea: $\frac{1}{\infty} : \frac{1}{\infty} : \frac{1}{\infty} : \frac{1}{1}$ sau după Bravais: (0001) .

— Pentru proiectiunea polilor diverselor formule ale sistemului hexagonal, se ia ca plan de proiectiune planul cercului mare, care trece prin centrul prizmei hexagonale care e și centrul sferei de proiectiune. Atunci axele lui Bravais se proiectează în adovarata lor mărime după: $x'x'$, $y'y'$, $z'z'$, pe când axa



principala se proiectează în O. - Axele binare de a doua specie se proiectează după: $x\bar{x}$, $y\bar{y}$, și $z\bar{z}$, și sunt bisectrițele unghiurilor formate de cele l. alte axe. Este evident că, polișetelor de protoprizma se proiectează pe circumferența cercului de proiectiune la extremitatea axelor binare de a doua specie.

Așa: vom avea poli: $(10\bar{1}0)$, $(0\bar{1}10)$, $(\bar{1}100)$ etc. iar în O se proiectează polișetelor de barișina acid notate: (0001) și $(000\bar{1})$.

— Ca și la cele l. alte sisteme precedente, vom obține prin modificarea elementelor prismei hexagonale, două feluri de forme secundare: I. Forme holodrice și II. Forme hemiedrice.

I. Forme Holodrice.

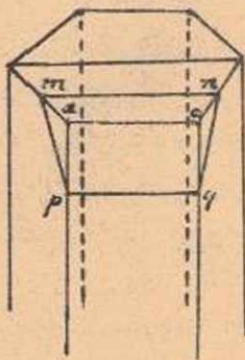
Vom avea a considera la prizma hexagonală două feluri de modificatium: A) Modificări pe muchii și B) Modificări pe unghiuri.

A. Modificări pe muchii.

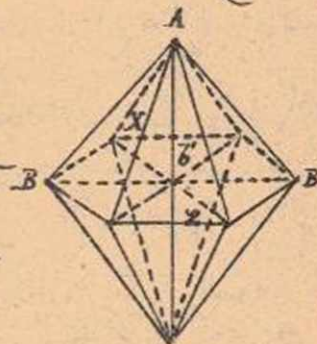
Aceste modificări pot fi: 1) Pe muchiile bazei și 2) Pe muchiile laterale. —

1. Modificată pe muchile bazice.

Aceste modificată nu sunt de cât simetrice și ne conduc la Solidul care se numește: Dihexaedru care se obține înlocuind fiecare muchie bazică a



prizmei prin o față care fiind paralelă cu acasă-
ta muchie, intercepta-
ză pe cele 6
alte două,
distanțe pro-

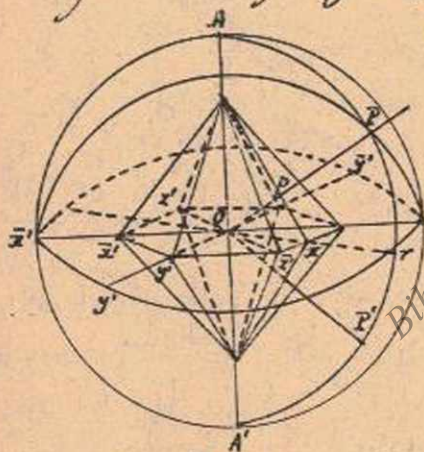


portionale cu lungimile lor. Asa: față mnpq care
ia: $ap = \frac{1}{2}h$, și cum $an = \frac{1}{2}b$ va avea ca simbol:
 $b^{\frac{1}{2}}b^{\frac{1}{2}}h^{\frac{1}{2}}$ și prin urmare notatiunea $b^{\frac{1}{2}}$ și fiind ca
 $2=y$, notatiunea este: $b^{\frac{1}{2}}$. - Fie ca avem 12
muchie bazice, vom obține un solid cu 12 fețe
compus din două piramide hexagonale supra-
pusse pe bazele lor. Fețele sale fiind unite trium-
ghiuri isoscele s'a dat acestui solid și numele
de Isoscelodru. El are înca: 8 vârfuri solide
din care: 2 culminante A și 6 vârfuri latera-
le B; apoi 18 muchii din care: 12 culminante
X și 6 laterale Z. -

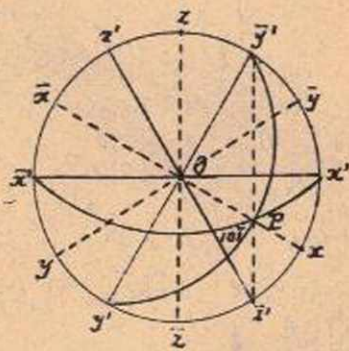
Naumann numește acest solid Protopiramida

caracterizată prin raportul parametric: $a:a:c$ de unde notatiunea: $\underline{P}$ sau, pentru a reprezenta toate protopiramidele: $a:a:mc$ și $\underline{mP}$. — După Weiss avem: $a:oa:\bar{a}:c$ sau în indici după Bravais: $(10\bar{1}1)$.

— Pentru a face proiecțiunea polilor fețelor Protopiramidelor, să considerăm acest solid înscris în sfera de proiecțiune și planul cercului de proiecțiune în care



ducem axe la lui Bravais precum și axe la lui Miller. Să considerăm fața $x'Az'$



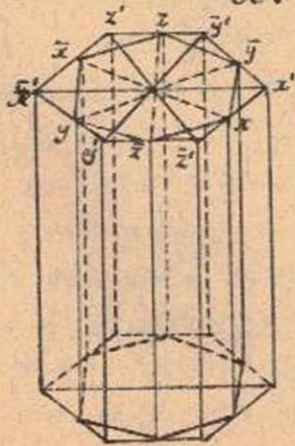
și să căutăm proiecțiunea polului ei. Normala la această față o atinge în punctul p și da pe sfera polul $\underline{P}$. — Acest pol se găsește la intersecția a două cercuri mari: APA' și $x'Px$. Să determinăm proiecțiile lor. Să măsurăm diedrul $x'z' = \angle$ a cărui supliment α ne da unghiul normalilor la fețele ce formează acest diedru; alături α este valoarea unghiului pOx , adică înclinarea polului feței către

planul de proiectie. Cercul mare APA' se proiecteaza dupa diametrul xx' bisectat in ghimul axelor $x'x'$ si $x'x'$. Pentru a gasi proiectia celui alt cerc, vom rabate cercul APA' in jurul lui xx' , pe planul cercului de proiectie; punctul de vedere vine in y , extremitatea diametrului perpendicular pe xx' , iar polul P va cadea in p la o distanta de x egala cu $\frac{d}{2}$. Unind punctul p cu punctul de vedere y' , se obtine in xx' intersectia P . Dacă ducem acum cercul mare $x'Px'$, el va reprezenta proiectia cercului mare de pe sfera XPX' iar P este proiectia polului sferii (1871).

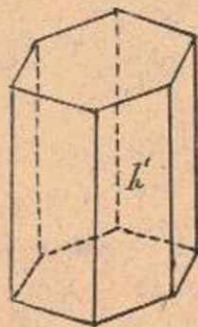
2. Modificatii pe muchile laterale.

Aceste modificatii sunt de 2 feluri: a). Simetrice si b). Disimetrice.

a. Modificatii simetrice.



Daca inlocuim una din muchile prizmei prin o fata paralela cu aceasta muchie si care ia pe coborolalt doua muchii batute distante

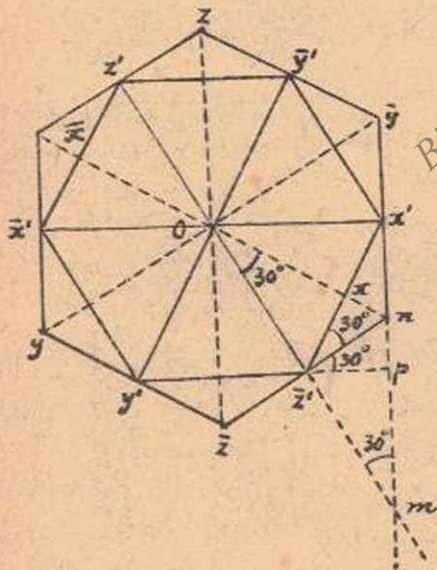


egale, această față va fi notată: $b^{\frac{1}{2}}b^{\frac{1}{2}}h^0$ sau $\underline{h'}$.

Si fiind că sunt 6 muchii laterale, vom avea 6 fețe, care formează o nouă priză, care se cheama: Priză hexagonală inversă dispusă astfel încât ca axele lui Bravais să unească centrele fețelor opuse. --

- După Naumann această priză corespunde raportului parametric: $a:2a:\infty c$ și prin urmare notativă: ∞P_2 . --

Se poate demonstra că: o față a acestor prize trece prin extremitatea unei axe, atingând axa adjacentă la o distanță dublă. --



În adevăr: Sa considerăm față care trece prin extremitatea lui $\underline{x'}$ și atinge pe $\underline{z'}$ în $\underline{m}$; va trebui să demonstrăm că: $Om = 2Ox'$. --

În figură unghiul $O\bar{z}'n = 90^\circ$ și fiind că $O\bar{z}'x = 60^\circ$ rezultă că: $n\bar{z}'x = 30^\circ$. De asemenea: $m\bar{z}'n = 90^\circ$ și fiind că: $m\bar{z}'p = y'\bar{z}'O = 60^\circ$ urmează că: $n\bar{z}'p = 30^\circ = n\bar{z}'x$. Insa: $p\bar{z}'n = p m\bar{z}'$ ca având laturile perpendiculare și pentru același

raion: $n\bar{z}'x' = \bar{z}'On$, deci: $\bar{z}'On = \bar{z}'mn$. Atunci

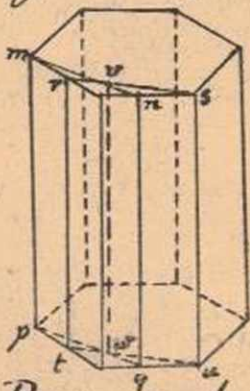
în triunghiul mno , două unghiuri fiind egale, laturile opuse trebuie să fie și ele egale. Urmează dar că: $no = nm$ și triunghiul nOm este isoscel, iar nz' e perpendiculară pe bază, pe care o împarte în două părți egale. Deci: $Oz' = z'm$ sau: $Om = Oz' + z'm = 2Oz' = 2Oz'$.

— După Weiss avem: $a : 2a : 2a : \infty c$ sau după Bravais: $(2\bar{1}\bar{1}0)$. —

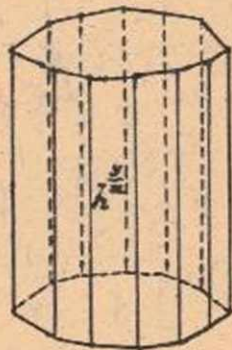
— Polii fetelor Deuteroprisme se găsesc pe circumferența cercului de proiecție, însă cad la extremitățile diametrelor ce reprezintă axele lui Bravais. —

6. Modificatii disimetrice.

Să înlocuim fiecare muchie laterală a prizmei hexagonale prin câte două fețe paralele cu aceea



muchie și care să se unifice la baze distanțe diferite. Se obține astfel o priză cu 12 fețe numi-

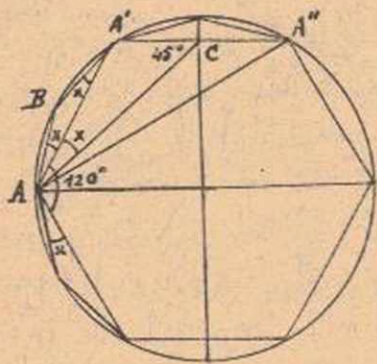


ta: Prizma dodecagonală care are ca notațiune

$6^{\frac{1}{2}}6^{\frac{1}{2}}h^{\frac{1}{2}}$ sau: $h^{\frac{y}{x}}$: raportul $\frac{y}{x} > 1$. —

Baza acestei prizme este un dodecagon, care

nu are unghiurile sale adiacente egale. - In ade-
var sa considerăm dodeca-



gonul circumscris unui
hexagon regulat. Sa vedem
dacă unghiurile A și B sunt
egale. Sa unim A cu A' și A''
și sa punem: $\angle BAA' = x$. Vom
ave: $A = 120^\circ + 2x$ și
 $B = 180^\circ - 2x$

Pentru ca A sa fie egal cu B,
ar trebui sa avem:

$$120^\circ + 2x = 180^\circ - 2x \text{ deci: } x = 15^\circ. -$$

Sa ducem dreapta AC paralela cu BA'; ea va
intercepta pe AA'' o lungime A'C asa ca distan-
tele luate pe muchiile AA' si A'A'' de o fata pa-
ralela cu BA' si care sunt: AA' si A'C sa fie între
ele ca sinusurile unghiurilor opuse in triun-
ghiul AA'C. Vom avea atunci: $\frac{AA'}{A'C} = \frac{\sin 45^\circ}{\sin 15^\circ}$.

Insa al doilea termen este irrational, si deci
nu e conform cu legea de rationalitate in
derivatia fetelor cristaline. Deci A nu poate fi
egal cu B, si prin urmare dodecagonul nu e
regulat. - Deci muchiile laterale ale prismei
dodecagone sunt de doua specii: 6 muchi ob-
tuze si 6 muchi mai putin obtuze. -

- Dupa Naumann, acest solid numit:
Prizma dihexagonala, corespunde raportului

parametric: $a: na: \infty c$, sau notațiunei: ∞Pn . -
 După Weiss avem: $a: ma: n\bar{a}: \infty c$ de unde
 notațiunea după Bravais: $(mn, n, \bar{m}, 0)$. -

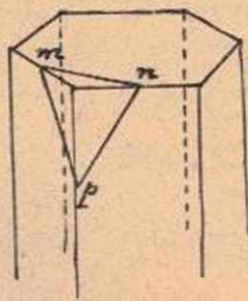
- Pentru proiectiunea polilor fetelor prizmei
 dihexagonale, observăm ca fețele fiind parale-
 le cu lara principala, poli lor se vor găsi pe cir-
 conferența cercului de proiectiune; apoi că, ele
 corespund fetelor piramidei dihexagonale, și
 atunci poli lor trebuie să se găsească la ex-
 tremitățile diametrelor pe care se proiectează
 poli fetelor piramidei dihexagonale. -

B. Modificatii pe unghiuri.

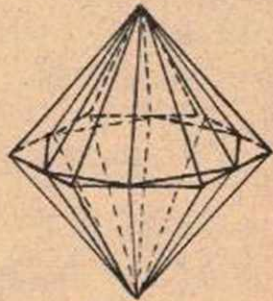
Aceste modificări pot să fie de două feluri:
 1) Simetrice și 2) Disimetrice. -

1. Modificatii simetrice.

Dacă înlocuim unghiurile solide a, vizmei
 hexagona-

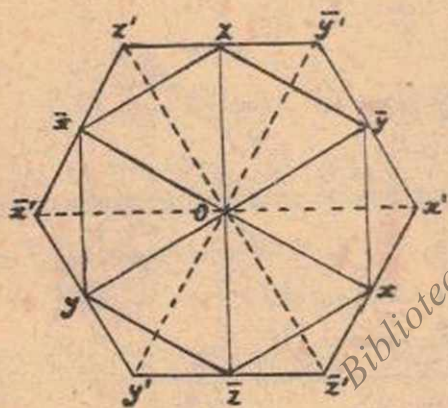


le prin
 câte o fa-
 tă care
 să ice re
 cele trei
 muchi ca
 re formea-
 șa aceste
 unghiuri



distanțe proportionale cu lungimile lor, vom obține un solid cu 12 fețe triunghiulare, care va fi: un Dihexaedru, a cărui notatiune va fi: $b^{\frac{1}{2}} b^{\frac{1}{2}} h^{\frac{1}{2}}$ sau $a^{\frac{2}{2}}$ și fiind ca: $x = z \dots a^1$. —

Dacă considerăm cele două dihexaedre pe care le-am obținut constatăm că: unul fiind așezat pe axele lui Bravais, cel-alt este așezat pe axele lui Miller,



așa că hexagonul de bază a acestui din urmă are unghiurile sale corespunzând cu mijlocurile unghiurilor hexagonului de bază a celui întâi și că e de ajuns a-l învârti de 60° în jurul unei axe principale pentru ca el să ocupe poziția celui întâi.

De aceea se dă celui întâi numele de: Dihexaedru direct sau Isoscelocedru pe muchii și celui al doilea numele de Dihexaedru invers sau Isoscelocedru pe unghiuri. —

— După Naumann, Dihexaedrul invers se numește: Deuterosiramide și corespunde raportului parametric: $a : 2a : c$ sau în cazul general: $a : 2a : mc$, de unde notatiunea: mP_2 . —

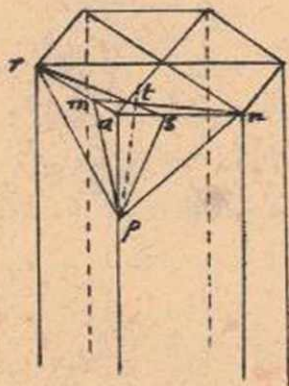
Dupa Weiss raportul parametric este:

a: $2a:2a:c$, de unde după Bravais (2112). -

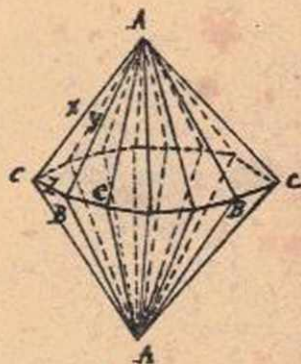
— Polii fetelor deuteropiramidei se proiectează ca și polii fetelor Protopiramidei și se găsesc pe diametrii ce reprezintă axele lui Bravais. ---

2. Modificatii disimetrice.

Dacă înlocuim unghiurile solide ale piramidei



hexagonale
prin câte
două fe-
te dispo-
se sime-
tric în ra-
port cu mu-
chile late-
rale cores-
punzătoare.



re, luând pe muchile bazei distanțe deosebite, vom obține un solid cu 34 fețe numit: Didodecaedru având forma unei duble piramide cu baza de dodecagon. Fetele sunt toate triunghiuri scalene; muchile în număr de 36 sunt de trei feluri: 12 muchi culminante mai lungi notate X ; 12 muchi intermediare Y și 12 muchi laterale Z mai scurte. Unghiurile sunt de asemenea de 3 specii: două unghiuri culminante A , compuse din câte 12 fețe, 6 unghiuri laterale

-194-

Begale între ele, alternând cu alte 6 unghiuri laterale egale între ele, însă diferite de cele precedente. - Notatiunea sa va fi: $\overline{b}^{\frac{1}{2}} \overline{b}^{\frac{1}{3}} \overline{h}^{\frac{1}{2}}$. -

Ca și la Prima dodecagonă, unghiurile adiacente ale bazei nu sunt egale. -

- După Naumann, Didodecaedrul corespunde raportului parametric: $a : na : mc$, va avea notatiunea: mPr și se numește: Piramida dihexagonală.

este ușor de văzut că: dacă facem: $n=2$ vom avea: Deuteropiramida. - În adevăr, dacă facem să varieze n de la 1 la 2, atunci două fețe adiacente a piramidei dihexagonale, cu tendința de a forma unghiuri din ce în ce mai mari, până când, pentru $n=2$ cele două fețe se află pe același plan. Această valoare e maximum căci, pentru o valoare a lui n mai mare de cât 2 solidul nu mai e convex. -

După Weiss, avem raportul parametric: $a : na : n'a : mc$, de unde notatiunea după Bravais: (mn', mn', mn, nn') . -

- Proiecțiunea polilor fetelor Piramidei dihexagonale se face așa: Să considerăm fața $x'Ax$; pentru a determina proiecțiunea polului acestei fețe, să scoborâm din centru normalele Op și Op' pe fețele care formează diedrul

$\angle$, precum și normala Op'' pe fața care determină

cu cea d'în-

tăi diedrul

X. Observăm

că, unghiul

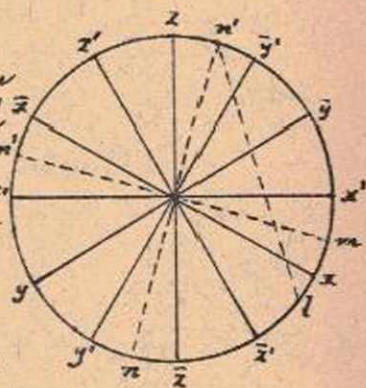
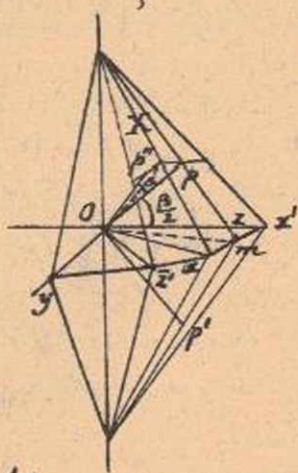
$\angle pOp' = \beta$ este

suplimentul lui $\angle$,

și $\angle pOp'' = \alpha$

este supli-

mentul lui

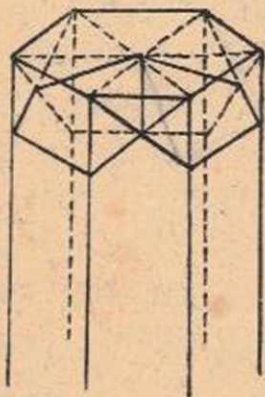


X. Atunci $\frac{\alpha}{2}$ ne dă unghiul pe care l'face xx' cu diametrul care reprezintă proiecția planului $Ap'm$, care conține polul fetei; și $\frac{\beta}{2}$ ne reprezintă înclinarea aceluși pol către planul cercului de proiecțiune. Atunci plecând de la x , luăm $xm = \frac{\alpha}{2}$; ducem diametrul mm' , care reprezintă proiecția planului ce trece prin p și axa verticală. Dacă rabatăm acest plan în jurul lui mm' , punctul de vedere vine în n' , iar polul cade pe circumferența cercului de proiecțiune în punctul l , și la distanța: $ml = \frac{\beta}{2}$. Unind atunci l cu n' , obținem cu mm' intersecția P , care este proiecția polului fetei date. --

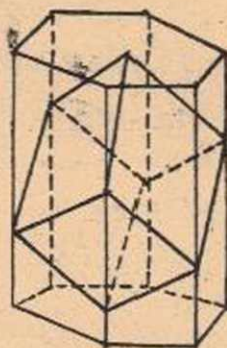
II. Forme Hemiedrice.

Formele hemiedrice ale sistemului hexagonal aparțin sistemului Romboedric, pe care avem să-l studiem mai în urmă în detalii. Aici vom arăta numai deducerea acestor forme din prisma hexagonală, studiind mai în detalii formele care nu se pot deduce din Romboedru.

— Să înlocuim muchiile bazei alterne ale



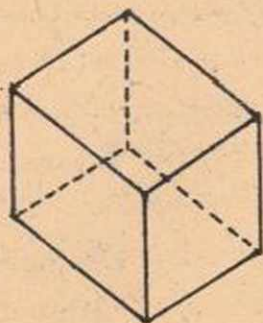
prizmei hexagonale prin planuri paralele cu aceste muchii, și să lăsăm să se dezvolte aceste fețe pentru a face să dispară cele



$+\frac{1}{2}b'$

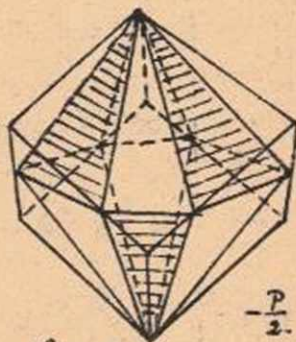
lalte. Vom obține astfel un solid cu 6 fețe, care sunt niste romburi egale. Acest solid se numește: Romboedru și, fiind că este hemiedria Dihexaedrului, va avea ca notațiune: $+\frac{1}{2}b'$. — Dacă modificatia e făcută pe cele lalte muchii, se obține un romboedru invers care va fi notat: $-\frac{1}{2}b'$. —

Prin combinarea a acestor două romboedre rezultă
dihedraedrul $\underline{b'}$. --



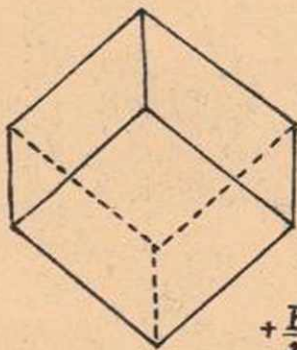
$-\frac{1}{2}b'$

Naumann admite și el
că formele
romboedrice
sunt he-
miedria
sistemului
hexagonal.



$-\frac{p}{2}$

Pentru acce-
ta, plecând de la Protopiramida
hexagonală, lăsa să se dez-



$+\frac{p}{2}$

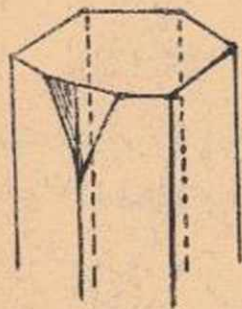
volte fete alternu sus și jos,
asa că, fetele care se dezvoltă
acoper pe cele l. alte. --
Rezultă un solid cu 6 fete
care este un Romboedru. --
Dacă dezvoltăm o serie de
fete, de ex. fetele $\underline{a}$, se obține
Romboedrul pozitiv notat
 $+\frac{p}{2}$; pe când fetele $\underline{b}$ dau

Romboedrul negativ: $-\frac{p}{2}$.

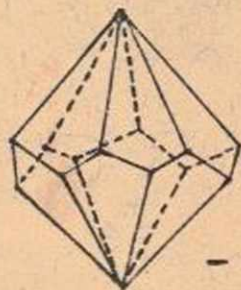
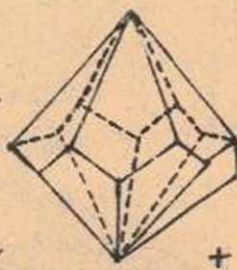
Cu toate acestea, Naumann dănd Romboedru
lui o importanță mai mare de cât unei forme
hemiedrice, întrebuințază pentru notatiunea
sa litera R inițială cuvântului Romboedru,

si atunci avem: pentru Romboedrul pozitiv notati-
unea $+R$ si pentru Romboedrul negativ: $-R$.

Sa considerăm acum prisma hexagonală

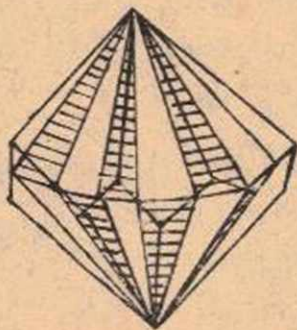


si sa în-
locuim
unghiur-
ile prin
câte do-
ua fete
din care
de voltăm



numai fetele alterne de sus si jos. Vom obtine atunci
o hemiedrie a piramidei dihexagonale, care va
ave 12 fete in forma de trapez, din care cumpă
s'a dat acestui solid numele de Trapezodru.

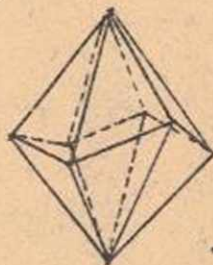
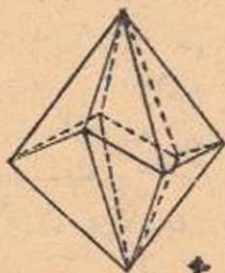
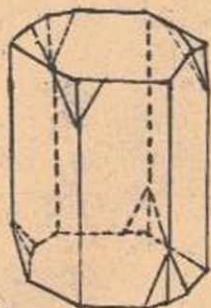
Si fiind că putem considera o serie sau alta de
fete alterne, vom obtine doua forme: Trapezoe-
dru direct notat: $+\frac{1}{2}(b^{\frac{2}{3}}b^{\frac{1}{3}}h^{\frac{1}{2}})$ si Trapezodru
invers, notat: $-\frac{1}{2}(b^{\frac{2}{3}}b^{\frac{1}{3}}h^{\frac{1}{2}})$.



— După Naumann, Trape-
zodrele se obtin direct ca
hemiedrie a piramidei
dihexagonale prin dezol-
tarea fetelor alterne de sus
si jos. Se obtin doua forme:
un Trapezodru direct,

notat: mPn dr. si un Trapezpedru stâng notat:
 $\frac{mPn}{2}$ st. -

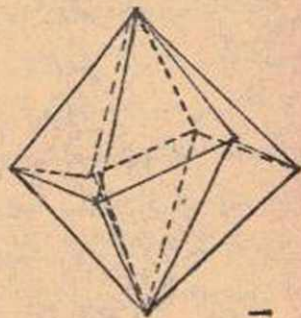
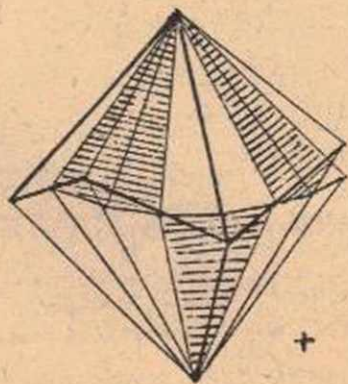
2 - Dacă considerăm acum prisma hexagona



la în care modificăm unghiurile alterne înlocuindu-le prin câte două fete, se obține alta hemiedrie a piramidei dihexagonale, care e un solid cu 12 fete care sunt toate triunghiuri scalene. Solidul se numește: Scalenoedru și fiind că se obțin două forme una pozitivă și alta negativă, notațiunea lor va fi:

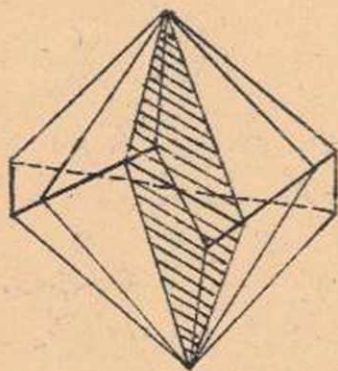
$$\pm \frac{1}{2} (6^{\frac{1}{2}} 6^{\frac{1}{2}} h^{\frac{1}{2}}).$$

După Van-
 mann aceste
 forme se
 obțin direct
 din pirami-
 da dihexago-
 nala prin
 dezvoltare
 de fațete

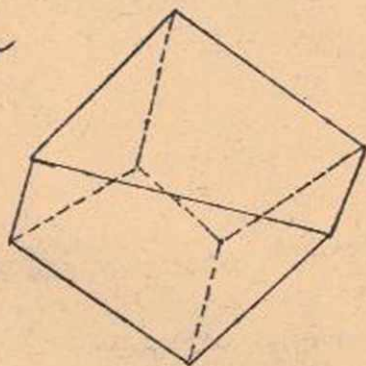


de fețe adjacente alterne sus și jos. Se obțin deci două Scalenoedre: unul pozitiv: $+\frac{mPn}{2}$, și altul negativ: $-\frac{mPn}{2}$.

— Să considerăm acum un Scalenoedru, și să



presupunem
că conservăm
o grupă de
două fețe
adjacente
sus și jos
și facem să
dispară
grupă ur-

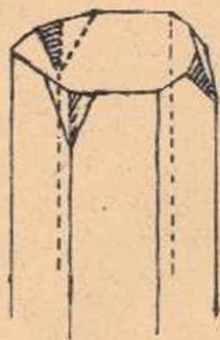


mătoare. Numărul fețelor se reduce la jumătate și se obține un solid cu 6 fețe a cărui muchi laterale se întorc în helice în jurul axei verticale. Forma fețelor fiind aceea a unui trapez și pentru a-l deosebi de Trapezodrul precedent, i s'a dat numele de: Trapezodru Trigon, fiind că are câte trei fețe sus și jos. — Și fiind că Scalenoedrul care i a dat naștere este el însuși o hemiedrie, aceste solide sunt deci o Tetartodrie a piramidei dihexagonale. Aceasta dublă hemiedrie imaginată de către Naumann, dă în definitiv 4 solide căci fiecare Scalenoedru dă două Trapezodre.

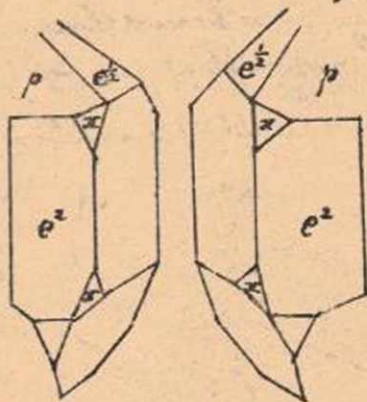
Pom avea atunci:

$$+\frac{mPn}{4} d, \quad +\frac{mPn}{4} st, \quad -\frac{mPn}{4} d, \quad -\frac{mPn}{4} st.$$

Dacă vom a obține aceste forme direct din prisma



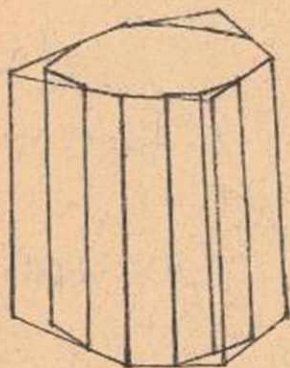
hexagona-
lă, va tre-
bui să con-
siderăm
mai întâi
trei muchi
laterale al-
terne; apoi
întoarcem
unghiuri.



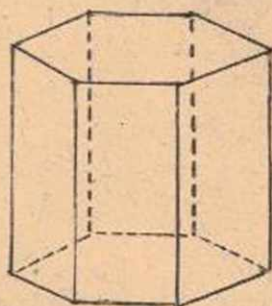
le corespund zetoare acestor muchi prin câte două fe-
te, ceea ce ne conduce la o prismă hemiedrică; dacă
acum din aceste fețe noi conservăm numai una
alternativ la partea inferioară și superioară,
rămân trei fețe la partea superioară și trei la
partea inferioară dispuse de o parte și alta
a aceluiași muchi laterale corespundente. A-
ceste fețe x , care se numesc: Fete plagiedre, se
găsesc pe cristalul de Quart și dacă considerăm
unul din aceste cristale așa dispus în cât față
 p a romboedrelui să fie în mijloc, dacă la
partea superioară fețele plagiedre sunt la
dreapta în raport cu față p , cristalul se nu-
mește Dextrogir, nume care e în legătură
cu proprietatea polarizării rotitoare, de
a întoarce la dreapta planul de polarizare,
când fețele plagiedre sunt la stânga fețelor p ,

crystalul se numește Levogir și întoarce la stânga planul de polarizare. —

— Naumann adăugate încă alte forme hemiedrice. Dacă



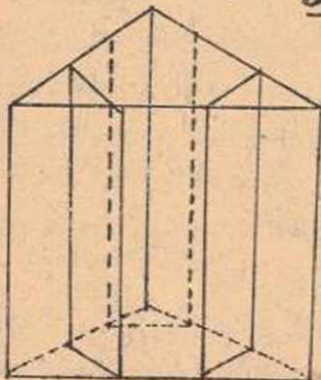
în prizma
dihexagona-
lă facem să
dispară fa-
țele de fe-
te alterne
obținem o
prizma ca-
re are ca



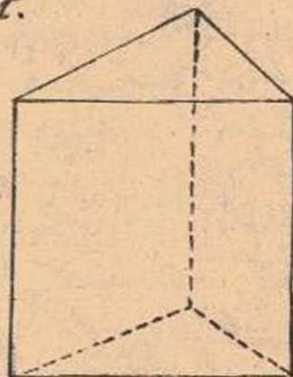
bază un hexagon neregulat, având trei unghiuri
mai obtuze și alte trei mai puțin obtuze. Se
obțin astfel în două solide care se numesc: Priz-
ma ditrigonala dreaptă și Prizma ditrigo-
nala stângă, a căror notatiune este:

$\infty P_n d$ și $\infty P_n st.$

Dacă conside-
răm deuterio-
prizma hexa-
gonală în ca-
re facem să
se dezvolte
fețele alterne
vom obține



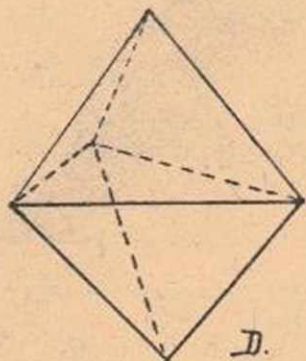
d



st

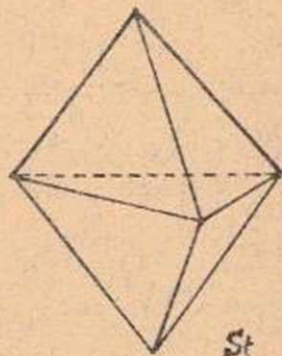
două prisme cu baze de triunghi care se
chiamă Prisme trigone, una dreapta nota-
ta: $\propto P_2 d$ și alta stângă notată: $\propto P_2 st.$

De asemenea dacă considerăm $\propto P_2$ deuteropi-
ramida hexa-



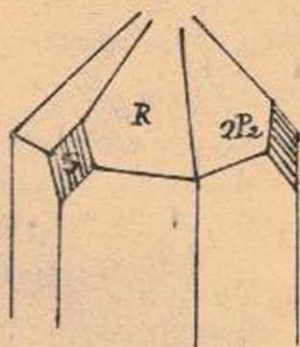
D.

gonală și dez-
voltăm fete-
le alterne co-
respunzătoare
sus și jos,
se obțin două
piramide cu
baze de triun-
ghi, și care se



St

numesc: Piramide trigone, din care una dreap-
tă notată în $P_2 d$

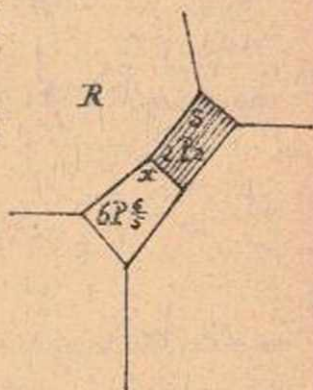


R

$P_2 d$

și alta stângă
notată: în $P_2 st.$

Acste fete $\propto$ se
găsesc în cris-
talul de cuarț
și câte odată
sunt asociate
cu fetele pla-
ciere etc.



R

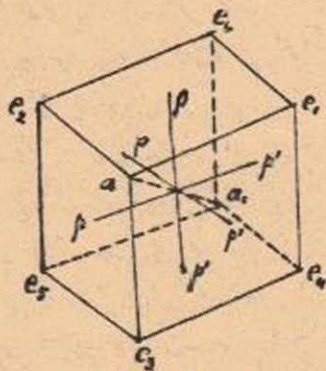
sunt notate S și se cheamă fete de Trigonoedru
sau de Hemisosecloedru. Ele au forma rombică

și sunt striate după direcțiunile care merg
scoborându-se de la dreapta la stânga pen-
tru cristali dextrogiri și de la stânga la
dreapta pentru cristali levogiri. - - -

V

Sistemul Romboedric.

După Levy, forma primitivă a acestui sistem
este: Romboedrul, care este un paralelipiped
a cărui fețe sunt miste rom-
buri egale. Pentru a forma
romboedrul, luăm trei drep-
te egale între ele:

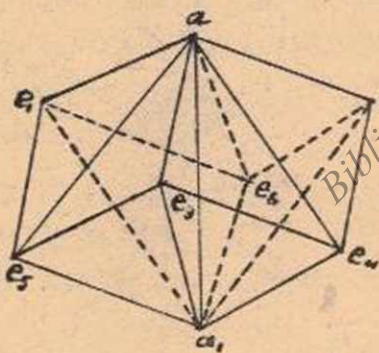


$ae_1 = ae_2 = ae_3$
și făcând unghiuri egale:
 $e_2 ae_1 = e_1 ae_3 = e_2 ae_3$

Să construim pe aceste trei
drepți ca muchii, un para-
lelipiped. El va avea 6 fețe

egale rombice și va forma Romboedrul. Drepte-
le: pp' , care reunește centrele fetelor opuse, sunt
egale și fac între ele unghiuri egale, fiind pa-
ralele cu muchiile ae_1, ae_2, ae_3 . Ele se numesc

axe. - Unghiul α și opusul său α_1 , sunt formate de trei unghiuri plane obtuze sau ascutite egale, pe când celelalte unghiuri: $e_1, e_2, e_3, \dots$ sunt formate de un unghi plan obtuz și două suplimentare sau de un unghi ascutit și două suplimentare. Diedrele care formează unghiurile α sunt egale, pe când diedrele: $e_1, e_2, e_3, \dots$ sunt suplimentare diedrelor opuse: $\alpha_1, \alpha_2, \dots$. Când unghiul α este format de unghiuri plane obtuze, romboedrul se face: obtus; și când e format de unghiuri plane ascutite se numește ascutit. -



Se așază de ordinărilor romboedrul așa ca axa $\alpha\alpha_1$ să fie verticală: Se dă acestei axe numele de axă principală. Romboedrul fiind pus în această poziție observăm că: muchiile $\alpha e_1, \alpha e_2, \alpha e_3$ sunt dispuse simetric în jurul acestei axe.

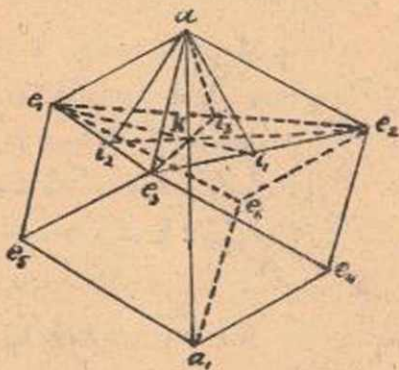
Dacă facem să treacă planuri prin una din aceste muchii și opusa sa, precum: αe_1 și αe_3 vom avea atâtea planuri de simetrie, care vor împărți romboedrul în câte două prisme

triunghiulare identice. Avem trei de aceste planuri: $ae_3a_1e_1$, $ae_1a_2e_2$ și $ae_2a_3e_3$. Aceste trei planuri de simetrie numite și Secțiuni principale se întâlnesc după axa principală aa_1 . --

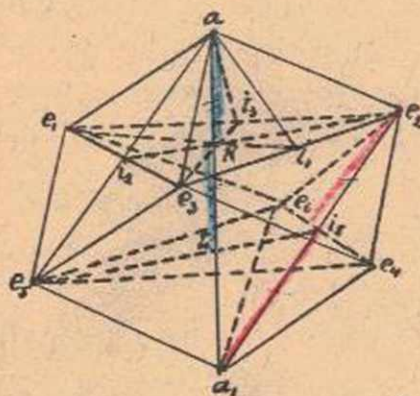
Triunghiurile ae_1a_1 , ae_2a_1 , ae_3a_1 sunt egale ca având $ae_1 = ae_2 = ae_3$, care sunt muchile romboedrului; apoi: $a_1e_1 = a_1e_2 = a_1e_3$ ca diagonale a fetelor romboedrului și aa_1 comună. Rezultă că unghiurile a_1ae_1 , a_1ae_2 , a_1ae_3 sunt egale: ele reprezintă unghiurile axei principale cu muchile. Deci: muchile culminante formate cu axa principală unghiuri egale. --

— Să luăm unghiurile $e_1e_2e_3$ între ele: dreptele: e_1e_2 , e_1e_3 , e_2e_3 sunt egale ca diagonalele fetelor romboedrului deci, triunghiul $e_1e_2e_3$ este ecvilateral. --

Dacă ducem medianele: e_1i_1 , e_2i_2 , e_3i_3 a acestui triunghi, ele se tăie în punctul K ce se găsește pe axa aa_1 . Atunci: $ai_1 = ai_2 = ai_3$ sunt egale ca oblice egal depărtate de piciorul perpendiculare, fiind că: $i_1K = i_2K = i_3K$. Rezultă dar că perpendicula aK și fiind că aK este verticală urmează că



medianele: $e_1 i_1, e_2 i_2, e_3 i_3$ sunt orizontale și prin urmare planul $e_1 e_2 e_3$ care le conține, este orizontal. -



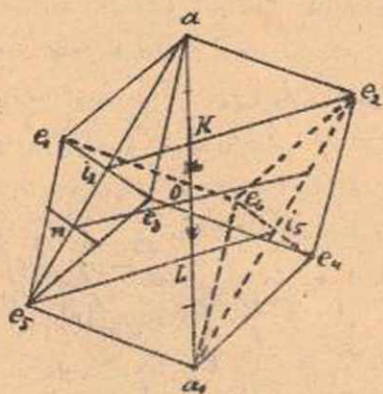
Să considerăm cele două triunghiuri orizontale: $e_1 e_2 e_3$ și $e_4 e_5 e_1$. Secțiunea principală $a e_3 a_1 e_2$ le taie după medianele $e_2 i_2$ și $e_3 i_3$.

Vom avea deci: $a i_2 = i_2 e_3$. Și atunci în triunghiul $a e_3 i_1$ avem: $a K = K L$. De asemenea în triunghiul $a_1 e_2 K$ vom avea: $a_1 i_5 = e_2 i_5$ deci: $a_1 L = K L$. Deci:

$$a K = K L = L a_1$$

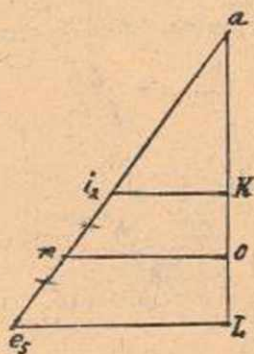
Sau: axa aa_1 este împărțită în trei părți egale de planurile triunghiurilor orizontale. -

- Prin centrul O al romboedrelui să ducem



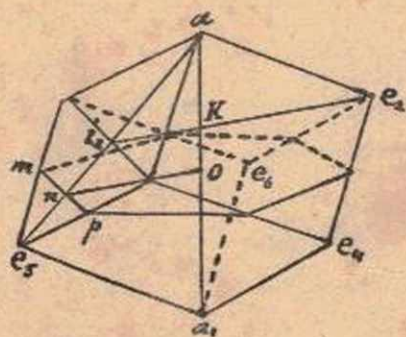
în planul secțiunii principale o dreaptă orizontală On . Fînd că avem:

$$Oa = Oa_1 \text{ și } a K = L a_1$$



urmăm să că: $OK = OL$. - Atunci în triunghiul $a e_3 L$ avem: On paralel cu $e_3 L$ și cu $i_2 K$, deci:

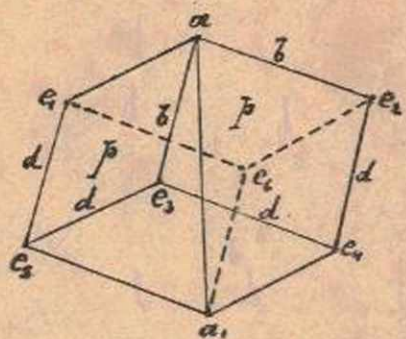
$i_2 n = n e_5$. Deci, planul orizontal dus prin centrul
întâlnește diagonalele $a e_5, a e_4, a e_6$ la $\frac{3}{4}$ din
lungimea lor de la punctul a . Acelaș plan
va întâlni fetele: $a e_5, a e_4,$
 $a e_6$ după dreptele paralele
cu diagonala unică a
fetelor romboedrului.



Vom avea deci: $m n p$ pa-
ralela cu $e_1 e_3$. Insa: $n e_3 =$
 $= n i_2$. Deci: $e_1 m = m e_5$.

Rezultă dar că: planul
orizontal care trece prin
centru, trece de asemenea prin mijlocul muchi-
lor laterale: $e_1 e_5, e_3 e_6$... și lasă pe suprafața
romboedrului ca urmă un hexagon regulat. --

- Notatiunea romboedrului este: ρ . El are
6 fete identice care sunt
miste romburi; apoi, 8 un-
ghiuri solide din care: două
unghiuri a numite culmi-
nante și 6 unghiuri e nu-
mite laterale; și 12 muchi
din care: 6 muchi b culmi-
nante formând unghiurile
a și alte 6 muchi d latera-



le în Fig. 299, care reunește unghiurile e. --

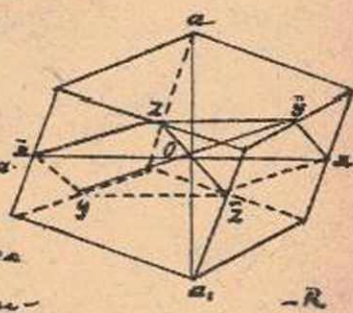
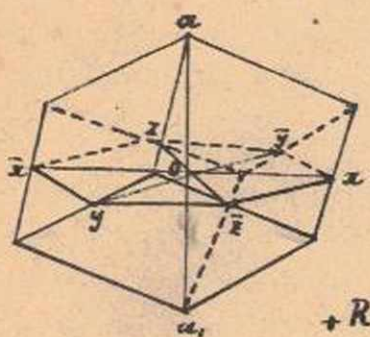
le în Fig. 299, care reunește unghiurile e. --

- După cum s'a văzut la sistemul hexagonal

Naumann

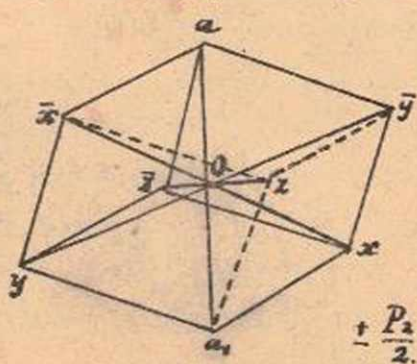
admite că
Rombodrul
este o formă
hemiedrică
a prizmei hexa-
gonale și e
dă notațiunea

$+\frac{P}{2}$. Iată pen-
tru a da o mai



mare importanță Rombodrul, întrebându-se
pentru notațiune litera R inițială cuvântului
Rombodru; atunci, Rombodrul primitiv a lui
Levy, corespunde cu Rombodrul pozitiv a lui Nau-
mann, și are ca notațiune $+R$. - Naumann admi-
te aceleași axe ca la sistemul hexagonal; deci rom-
bodrul va corespunde raportului parametric:

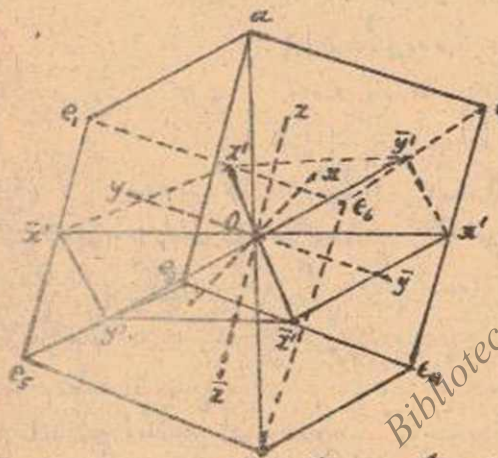
$$a : a : c. \dots \dots$$



Putem obține Rombodrul ca
hemiedrie a Dieropiramidei,
ca și a Protopiramidei;
în acest caz axele laterale
rennesc unghiurile e două
câte două. Notațiunea, sa-
va fi în acest caz $+\frac{P_2}{2}$. -
Rombodrul poate fi dedus
de asemenea din Piramida

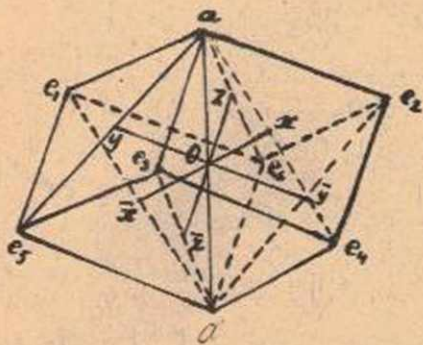
Dihexagonală, făcând să dispară mai întâi alternativ fețele corespondente sus și jos; se obține astfel mai întâi o prismă hexaedric: o Tritopiramida notată: mPn, din care prin o nouă hemiedrie se obține Romboedrul, care este atunci o Tetartodrie și va fi notat: mPn. -

- Pentru a vedea notațiunile Romboedru -
lui după Miller și Bravais, să considerăm mai
întâi axele. Vom lua
un Romboedru a cărui
axă ternară aa, este ver-
ticală, și e construit pe
axele unei prismă hexa-
gonale, a cărei axă sa-
nară coincide cu aa. -

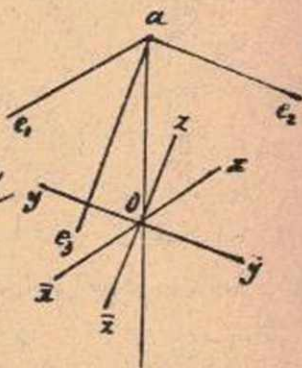


Stim că în jurul acestor
axe, muchiile culmizante sunt dispuse si-
metric. Să considerăm axele care reuneșc
mijlocurile muchilor laterale opuse și se în-
crucișază în mijlocul axei ternare; Stim că
aceste axe se găsesc în planul orizontal și for-
mează unghiuri de 60° : ele corespund cu aax-
le binare de prima specie de la sistemul hexa-
gonal, fiind bisectrițele unghiurilor formate
de cele - l. - alte axe. Aceste sunt axele lui Brav-
vais. Reunind extremitățile acestor axe, vom

obține hexagonul orizontal, a cărui plan e perpendicular pe axa aa_1 . - -



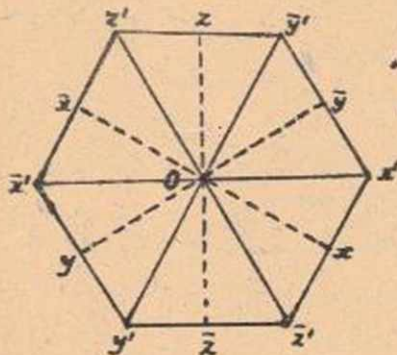
Putem considera încă un alt sistem de axe, acel care se obține unind mijlocurile fetelor opuse fiecare: $x\bar{x}$, $y\bar{y}$, $z\bar{z}$, care



se întâlnesc în centrul O al Romboedrului. Aceste sunt axele lui Levy și a lui Miller. Observăm că, fiecare din aceste axe este paralelă cu una din cele trei muchii culminante așa că: dacă facem să treacă un plan prin $x\bar{x}$ și muchia ae_1 , acest plan va trece și prin a, e_4 și va da diagonalele ae_4 și a, e_1 în mijlocul cărora vin extremitățile axei $x\bar{x}$. De asemenea planul care trece prin $y\bar{y}$ și ae_2 va da diagonalele ae_5 și a, e_2 iar planul care trece prin $z\bar{z}$ și ae_3 va da diagonalele ae_6 și a, e_3 . - Fiecare din aceste planuri împărțind Romboedrul în 2 părți egale, va fi un plan de simetrie: vor forma între ele unghiuri de 120° . - -

Pentru a pute mai bine observa în ce re-

latime se găsesc axele, vom presupune planul hexagonului orizontal ca plan de proiectiune și atunci proiectiile axelor vor fi:



$x\bar{x}, y\bar{y}, z\bar{z}$ și
 $x'x', y'y', z'z'.$ -

Este ușor de văzut că, unele sunt bisectrițele unghiurilor formate de celelalte axe. - -

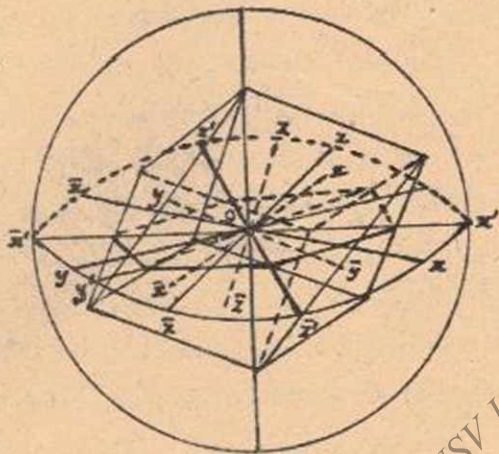
Din cele ce am văzut rezultă că, pentru sistemul romboedric vom considera două sisteme de axe: Sistemul lui Bravais cu 4 axe și sistemul lui Miller cu 3 axe. - Tar ca urmare, vom avea pentru sistemul romboedric 4 notatuni: aceea a lui Levy, a lui Naumann, a lui Miller și a lui Bravais. - Deci, pentru Romboedrul primitiv vom avea notatiunile:

$a : \infty a : \bar{a} : c$ sau $(10\bar{1}1)$ Bravais

și $a : \infty a : \infty a$ sau (100) Miller.

- Să examinăm acum a proiectia polilor fețelor Romboedrului primitiv. Vom lua ca plan de proiectiune planul ce conține axele binare adică planul hexagonului orizontal. Fie O centrul Romboedrului și a cercului de proiectie corespunzător hexagonului orizontal. Axa principală aa , se proiectează în O, iar axele

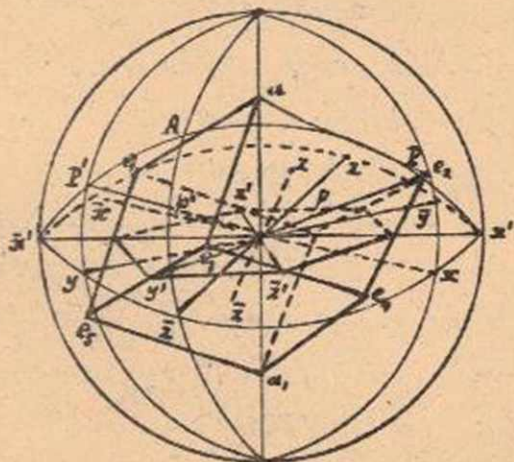
$\bar{x}\bar{x}$, $\bar{y}\bar{y}$, $\bar{z}\bar{z}$ după $xO\bar{x}$, $yO\bar{y}$, $zO\bar{z}$, formând între ele unghiuri de 120° .



Însă după cele ca am văzut mai sus, planurile care trec prin axa principală și muchiile culminante, conțin de asemenea axele: $\bar{x}\bar{x}$, $\bar{y}\bar{y}$, $\bar{z}\bar{z}$.

Deci, muchiile culminante se proiectează așa după: $O\bar{x}$, $O\bar{y}$, $O\bar{z}$. Axela bina-

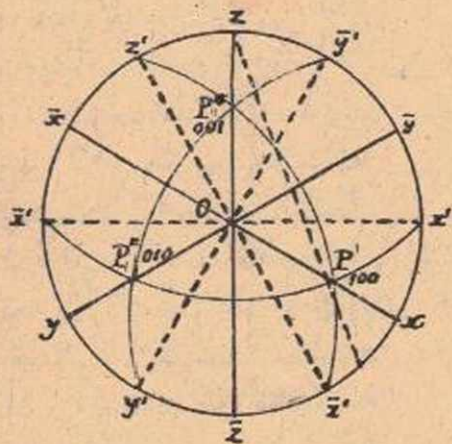
re de prima specie, fiind în planul de proiecție se vor proiecta în



adevărata lor mărime după $\bar{x}'\bar{x}'$, $\bar{y}'\bar{y}'$, $\bar{z}'\bar{z}'$, formând între ele unghiuri de 120° și cu axele de a doua specie unghiuri de 30° . - -

Acum, pentru a face proiecția polilor fatelor romboedrelor primitive, observăm

că, perpendicularele scosorâte din centru pe fețe nu coincid cu axele Ox , Oy , Oz , dar sunt continute în planurile ce trec prin aceste axe



și așa aa_1 , așa ca, polul feței e_2 , ae_3 , e_4 se va găsi la intersecția cercului ce trece prin aa_1 și Ox , cu cercul ce trece prin pol și $x'x''$. Pentru a determina proiecția lui știm că, primul plan se proiectează după $x'x''$, deci, polul se va găsi pe porțiunea Ox . Pentru

a determina proiecția planului al doilea, măsurăm diedrul α_3 , care se proiectează după Ox ; suplimentul lui α , reprezintă unghiul normalilor la fețele ce formează diedrul α_3 iar $\frac{\alpha}{2}$ va fi distanța polului la cercul corespunzător diedrului α_3 , - și prin urmare:
 $\pi - \frac{\alpha}{2}$ distanța polului la x' extremitatea diametrului $x'x''$ perpendicular pe $z'z''$. Dacă vom rabate cercul $x'P'x''$ în jurul lui $x'x''$, re-planul de proiecție, este evident că punctul de vedere va veni în z' , iar polul în un punct P pe circumferința cercului de proiecție,

la o distanță $\pi - \frac{\alpha}{2}$ de la $\underline{x'}$. Unind punctul p cu $\underline{x}$ obținem cu $\underline{x\bar{x}}$ intersecția P' ; prin $\underline{x'}$, P' și $\underline{x}$ ducem un cerc mare, care reprezintă proiecția cercului $\underline{x'P\bar{x}'}$, iar P' este proiecția polului P . Tot așa vom determina proiecția polilor P_1, P_2 a celor l. alte fete. — — —

Dacă prin câte doi poli astfel în determinați și axa corespundență ducem un cerc mare, vom obține un triunghi sfERIC $P'P_1P_2$ în interiorul căruia vor cădea poli fetei romboidurilor ascuțite, iar poli romboidurilor obtuze se vor găsi în afara acestui triunghi. Notatiunea polilor este: $P' \dots (100)$, $P_1 (010)$, $P_2 (001)$. — —

Romboidul e susceptibil mai întâi de 2 feluri de modificări: I. Modificată pe unghiuri și II. Modificată pe muchi. —

I. Modificată pe unghiuri.

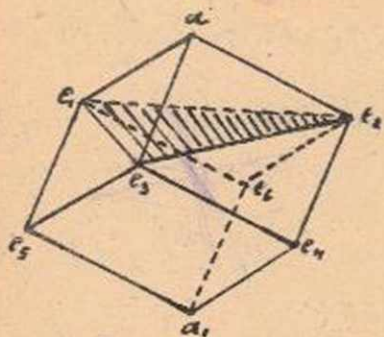
Aici vom avea de considerat două cazuri: A) Modificată pe unghiurile $\underline{a}$ și B) Modificată pe unghiurile $\underline{e}$. —

A) Modificată pe unghiurile $\underline{a}$.

Acste modificări sunt de două feluri: a) Simetrice și b) Disimetrice. —

a). Modificați simetrice.

- 1). Să considerăm planul care trece prin unghiurile e_1, e_2, e_3 și care, înlocuind unghiul a , ia pe cele trei muchii b , distanțe egale.



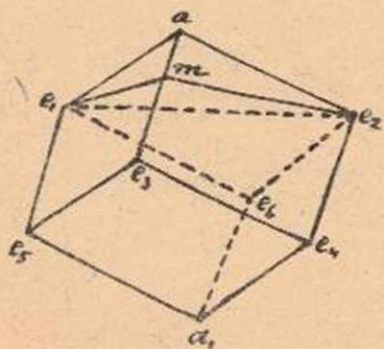
Fata va fi notată: $b'b'b'$ sau a' . Aceasta fata nu e altceva de cât Barzifina coidul, care, dupa Naumann corespunde raportului para-

metric: $a : a : Oc$ sau notațiunea: OR .

Dupa Weiss și Rose avem: $oa : oa : oa : c$ și dau. dupa Bravais: (0001) .

Dupa Miller avem: $a : a : a$ sau (111) .

— Proiecțiunea polului fetei de Barzifinacoid se găsește în centrul cercului de proiecțiune confundându-se cu proiecțiunea axei principale. —

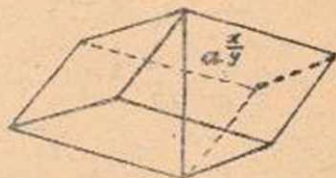


- 2). Fie planul me, e_2 care ia distanțele: $am = b^x$, $ae_1 = b'$, $ae_2 = b''$. Fata va fi notată: $b'b'b''$ sau a^x .

Fiind că modificatiunile sunt simetrice în jurul axei aa_1 , vom avea trei

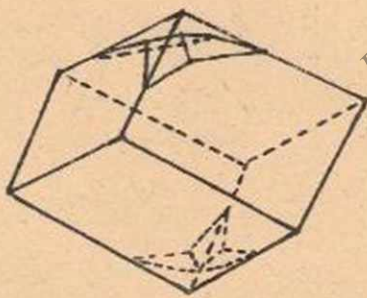
Se te la partea superioară și trei la partea inferioară, ceea ce ne va conduce la un Rombocedru de forma generală: a^x . -

Se obține astfel o serie de romboedri care sunt obtuși și care pot

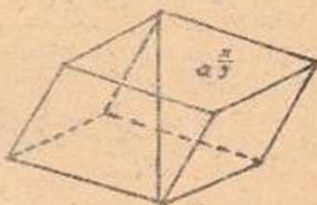


D

fi de două feluri după valorile ce vom da distanțelor



luate pe muchi. Așa luând formula generală:



I

$$b^{\frac{1}{2}} b^{\frac{1}{2}} b^{\frac{1}{2}} \text{ sau } a^{\frac{x}{3}}$$

Dacă: $x > y$ sau $\frac{x}{y} > 1$, se obține o serie de Rombocedre directe precum: $b^{\frac{1}{2}} b^{\frac{1}{2}} b^{\frac{1}{2}}$ sau $a^{\frac{x}{3}}$, $b^{\frac{1}{3}} b^{\frac{1}{3}} b^{\frac{1}{3}}$ sau $a^{\frac{x}{3}}$. Dacă vom avea: $x < y$ și prin urmare: $\frac{x}{y} < 1$, atunci obținem o serie de Rombocedre inverse precum: $b^{\frac{1}{2}} b^{\frac{1}{2}} b^{\frac{1}{2}}$ sau $a^{\frac{x}{3}}$, $b^{\frac{1}{3}} b^{\frac{1}{3}} b^{\frac{1}{3}}$ sau $a^{\frac{x}{3}}$,

și $b^{\frac{1}{2}} b^{\frac{1}{3}} b^{\frac{1}{5}}$ sau: $a^{\frac{2}{5}}$. --

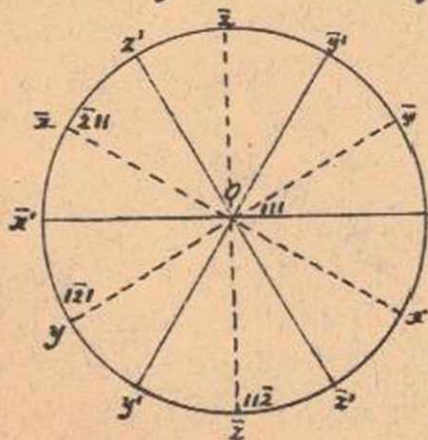
— După Naumann, aceste romboedre, corespunzând raportului parametric: $a:a:\frac{1}{m}c$ vor fi notati: $\pm \frac{1}{m}R$, — ceea ce arată ca pot fi pozitivi sau directi și negativi sau inversi, cu condiția ca: $\frac{1}{m} < 1$. --

După Bravais avem: $a:oa:\bar{a}:\frac{1}{m}c$ sau $(10\bar{1}m)$.

— Pentru a găsi notațiunea după Miller, putem proceda în două moduri:

1). Sau plecând direct de la notațiunea lui Levy și atunci: indicii lui Miller sunt inversele exponentilor lui b din notațiunea lui Levy: așa, din $b^{\frac{1}{2}} b^{\frac{1}{3}} b^{\frac{1}{5}}$ vom avea: $\frac{2}{1}:\frac{1}{1}:\frac{1}{1}$ sau: (211) ; din $b^{\frac{1}{2}} b^{\frac{1}{2}} b^{\frac{1}{2}}$ avem: (322) . --

2). — Sau plecând de la notațiunea lui Bravais și servindu-ne de anumite formule de transformare, pe care ne propunem a le stabili. --



Să considerăm proiecțiunea axelor lui Bravais și a lui Miller. La extremitățile axelor lui Miller se găsesc polii fetilor de Protoperizma: $11\bar{2}$, $1\bar{2}1$, $2\bar{1}1$, iar în centru se proiectează polul fetei de Bazipinaand (111) . — Observăm ca: fete

de bazipinacoid este în zonă enfiereare din fațete
protoprizmei, așa ca axele de zonă sunt tocmai
axele lui Bravais, și prin urmare, conform le-
gei zonelor, vom căuta indicii acestor axe de zo-
nă. - Vom avea deci:

Pentru Zonă: (111) cu $(11\bar{2})$:

$$\begin{array}{c|ccc|c} 1 & 1\bar{2} & 11 & \bar{2} & 1-\bar{2}, \bar{2}-1 & 1-1 \\ 1 & \bar{1}\bar{1}\bar{1} & 1 & 1 & 3 & 3 \end{array} \quad \text{Sum: } (1\bar{1}0). -$$

Deci: indicii axei de Zonă: $x'x'$ sunt: $(1\bar{1}0)$. -

Pentru $y'y'$ vom găsi:

$$\begin{array}{c|ccc|c} \bar{2} & 11 & \bar{2} & 1 & 1-1 & 1-\bar{2} & \bar{2}-1 \\ 1 & \bar{1}\bar{1}\bar{1} & 1 & 1 & 0 & 3 & \bar{3} \end{array} \quad \text{Sum } (01\bar{1}). -$$

și pentru $z'z'$ vom avea:

$$\begin{array}{c|ccc|c} 1 & \bar{2} & 11 & \bar{2} & 1 & \bar{2}-1 & 1-1 & 1-\bar{2} \\ 1 & \bar{1}\bar{1}\bar{1} & 1 & 1 & 1 & \bar{3} & 0 & 3 \end{array} \quad \text{Sum } (\bar{1}01).$$

Făcând suma indicilor axelor de Zonă, ga-
sim că ea este egală cu zero:

$$1 + \bar{1} + 0 = 0, \quad 0 + 1 + \bar{1} = 0, \quad \bar{1} + 0 + 1 = 0.$$

Pe când pentru axa principală ea este: $1+1+1$
diferența de zero. - -

Insemnând cu $h, K, \bar{e}, l$ indicii lui Bravais și
prin q, r, s indicii lui Miller, vom putea scrie:

$$\left. \begin{array}{lcl} \text{Pentru fața în } x': & q-r+0=0 & \text{sum } h=q-r \\ " & " & " \\ " & y': 0+r-s=0 & " K=r-s \\ " & z': \bar{q}+0+s=0 & " \bar{e}=s-q \\ " & a: q+r+s=l & " l=q+r+s \end{array} \right\} \cdot (\alpha)$$

Ultima din formulele (α) ne dă: $q = l - r - s$.

Însă: $-r = h - q$ și $-s = -\bar{i} - q$ Deci:

$$q = l + h - q - \bar{i} - q \text{ sau: } 3q = l + h - \bar{i}$$

Vom găsi de asemenea: $3r = l + K - h$ și

$$3s = l + \bar{i} - K$$

$$\text{Sau: } \left. \begin{array}{l} q = l + h - \bar{i} \\ r = l + K - h \\ s = l + \bar{i} - K \end{array} \right\} (\beta).$$

Formulele (α) și (β) ne servesc a transforma indicii lui Bravais în Miller, sau pe a lui Miller în Bravais.

Asa: notatiunea: $b^{\frac{1}{3}}b^{\frac{1}{3}}b^{\frac{1}{3}} = a^{\frac{2}{3}}$, ne dă direct după Miller (211). După Bravais avem direct: (4014). Pentru a deduce din Bravais în Miller avem: $q = 4 + 1 - \bar{1} = 6$, $r = 4 + 0 - 1 = 3$, $s = 4 + \bar{1} - 0 = 3$

$$\text{Sau: } (633), \text{ sau } (211). \dots$$

De asemenea: $b^{\frac{1}{3}}b^{\frac{1}{3}}b^{\frac{1}{3}} = a^{\frac{2}{3}} = (10\bar{1}7)$ ne dă după Miller: $q = 7 + 1 - \bar{1} = 9$, $r = 7 + 0 - 1 = 6$, $s = 7 + \bar{1} - 0 = 6$.

$$\text{Sau: } (322).$$

— Proiectând polii fetelor acestor romboedri observăm că: 1) Pentru romboedrii obtuși, proiectiunea polilor fetelor se găsește în interiorul triunghiului sferic $p p' p''$; 2) că, polii romboedrilor direcți, precum: (411), (311), (211).

se vor găsi cuprinsi între O și P , O și P' , O și P'' ;

pe când pot fi fetelor romboedrilor inversi precum: (221), (332). ... Se vor proiecta între O și P , O și P' , O și P'' .

b). Modificată disimetrică. -

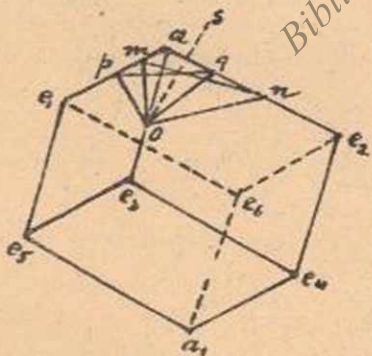
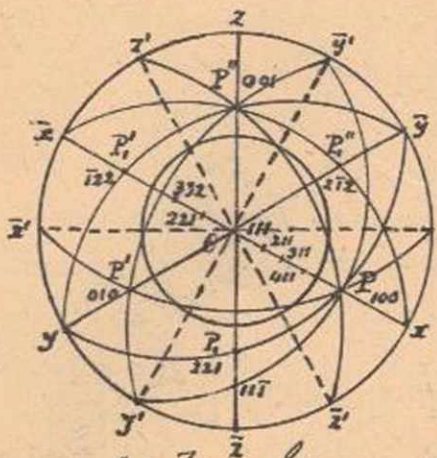
1). Să considerăm planul Omn care ia pe cele trei

muchi b ce formează unghiul α la distanțe diferite: $ao = \frac{1}{x} b$, $am = \frac{1}{y} b$, $an = \frac{1}{z} b$, așa ca: $x < y < z$. Pentru rezon de simetrie, va trebui o

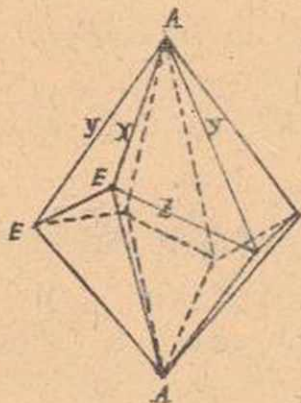
altă față Opg , care să aie $ao = \frac{1}{x} b$, $ap = \frac{1}{x} b$, $aq = \frac{1}{y} b$.

Ele se vor întreta după dreapta Os . Si fiind că în jurul lui α sunt trei muchi simetrici, vom obține în definitiv 6 fete care, împreună cu cele ce înlocuiesc unghiul α , vor forma un solid cu 12

fete, care sunt niște triunghiuri Scalene, de unde numele de Scalenoedru, dat solidului.



Acest solid mai are: 8 unghiuri solide din care: 2 unghiuri culmi-



nante A, formate de câte 6 fețe și 6 unghiuri laterale E formate din câte 4 fețe. - în fine are 18 muchii de 3 feluri: 6 muchii culminante lungi Y, 6 mai scurte X și șase muchii laterale în fig. pag. diferita de cele precedente. -

Notatiunea sa generală este: $b^{\frac{1}{2}} b^{\frac{1}{3}} b^{\frac{1}{4}}$. -

Valorile lui x, y, z , pot să varieze, așa ca vom avea ca și pentru Tomboedre: Scalenoedre directe și Scalenoedre inverse. -

Pentru Scalenoedrele directe vom avea relațiunea: $x + z > 2y$.

iar pentru Scalenoedrele inverse: $x + z < 2y$.

Ca Scalenoedre directe avem:

$$b^1 b^{\frac{1}{2}} b^{\frac{1}{4}} \text{ pentru care: } 1 + 4 > 2 \times 2. -$$

$$b^{\frac{1}{2}} b^{\frac{1}{3}} b^{\frac{1}{5}} \text{ " " } 2 + 5 > 2 \times 3$$

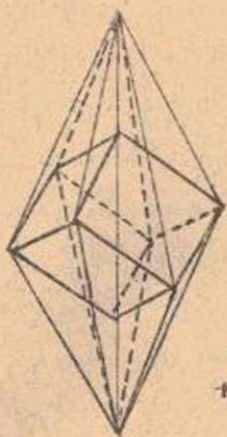
Pe când Scalenoedrele:

$$b^1 b^{\frac{1}{3}} b^{\frac{1}{6}} \text{ pentru care: } 1 + 4 < 2 \times 3.$$

$$b^{\frac{1}{2}} b^{\frac{1}{4}} b^{\frac{1}{5}} \text{ " " } 2 + 5 < 2 \times 4.$$

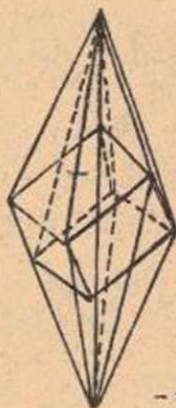
Sunt inverse. -

- Cu toate că Naumann considera Scaleno-



+mRn

edrele ca
o hemiedrie
a piramidei
dihexagona-
le, pentru
a explica
notatiu-
nea în va-
riet cu Rom-
boedru,



-mRn

redmite că, în interiorul fiecărui Scalenoedru
există un centru Rombocedric a cărui muchii
laterale coincid cu acele ale Scalenoedru-
lui. Atunci pentru a deduce Scalenoedru
din Rombocedru, este de ajuns de a lungi
axa principală a Rombocedrului în sus și
în jos de o cantitate constantă, lăsând
intacte muchiile laterale; atunci fiecare
față a Rombocedrului se va împărți în
două prin o muchie care apare în mijloc,
iar cele trei fețe a Rombocedrului vor forma
6 fețe ale Scalinoedrului. Deci: Scaleno-
edru va fi pozitiv sau negativ, ca și Rombo-
edru care i-a dat naștere. — —

Raportul parametric corespondent va fi:

na : a : mc si notatiunea : $\pm mRn$. -

Dupa Weiss avem : na : n'a : $\bar{a}$: mc, sau
dupa Bravais : (mn', mn, mnn', nn'). -

Pentru a avea notatiunea dupa Miller
ne vom servi de formulele de transformare.

Daca vom transforma o notatiune
dupa Bravais sau Miller in notatiune
dupa Naumann, va trebui sa gasim rela-
tiunile ce exista intre m si n a lui Nau-
mann, si indicii : h, k, $\bar{l}$, l sau q, r, s. -

Sa considerăm notatiunea generala a
lui Weiss : na : n'a : $\bar{a}$: mc, in care luând
inversile parametrilor si aducând la for-
ma întreaga avem :

$$h = mn', \quad k = mn, \quad \bar{l} = mnn', \quad l = nn'$$

Insa, putem scrie :

$$m = \frac{mnn'}{nn'} = \frac{\bar{l}}{l} \quad \text{si}$$

$$n = \frac{mnn'}{mn'} = \frac{\bar{l}}{h}$$

Dar : $\bar{l} = h + k$ Prin urmare vom pune în defi-
nitiv : $m = \frac{h+k}{l}$ si $n = \frac{h+k}{h}$

Atunci notatiunea generată a lui Naumann
m R n devine : $\frac{h+k}{l} R \frac{h+k}{h}$.

Aceasta pentru formule directe in care : $h > k$. -

Pentru formele inverse în care: $h < K$, formula devine: $\frac{h+K}{2} R \frac{h+K}{2} \dots$

Pentru a găsi formulele de transformare în indice lui Miller observăm că:

$$h = q - r, K = r - s, L = q + r + s, \bar{r} = s - q \text{ Deci:}$$

$$h + K = q - r + r - s = q - s$$

Atunci notațiunile precedente devin:

$$\text{Forme directe: } \frac{q-s}{q+r+s} R \frac{q-s}{q-r} \text{ în care: } q+s > 2r.$$

$$\text{Forme inverse: } \frac{q-s}{q+r+s} R \frac{q-s}{r-s} \text{ : } q+s < 2r.$$

Iată câteva aplicațiuni:

Fie în notațiunea generală după Weiss:

$$\frac{1}{2}a : a : \frac{1}{3}\bar{a} : \frac{1}{7}c. \text{ După Bravais: } (21\bar{3}7).$$

După Miller prin transformare avem:

$$q = 7 + 2 - \bar{3} = 12$$

$$r = 7 + 1 - 2 = 6 \text{ sau: } (421). -$$

$$s = 7 + \bar{3} - 1 = 3$$

Aici avem: $h > K$ adică: $2 > 1$ și $q+s > 2r$: $4+1 > 2 \times 2$.

Deci: Scelinoedrul este Direct. -

Notațiunea după Naumann dedusă direct din cea parametrică, pe care o scriem: $\frac{1}{2}a : \frac{1}{3}\bar{a} : \frac{1}{7}c$,

$$\text{sau } \frac{3}{2}a : a : \frac{3}{7}c \text{ de unde: } +\frac{3}{2} R \frac{3}{2}.$$

Dedusă după Bravais și Miller după formulele precedente vom avea:

$$\frac{2+1}{7} R \frac{2+1}{2} \text{ sau } \frac{3}{7} R \frac{3}{2} \text{ din Bravais:}$$

$$\text{ce } \frac{4-1}{4+2+1} R \frac{4-1}{4-2} \text{ sau } + \frac{3}{7} R \frac{3}{2} \text{ din Miller}$$

Pe încă: $a: \frac{1}{2} a: \frac{1}{3} a: \frac{1}{8} c$ După Bravais: $(12\bar{3}8)$. -

După Miller: $q = 8 + 1 - \bar{3} = 12$

$$r = 8 + 2 - 1 = 9 \text{ sau } (431) \text{. -}$$

$$s = 8 + \bar{3} - 2 = 3$$

Scalenocdrul este invers căci avem:

$$1 < 2 \text{ și } 4 + 1 < 2 \times 3 \text{. -}$$

După Naumann avem:

$$\frac{1+2}{8} R \frac{1+2}{2} \text{ sau } \frac{3}{8} R \frac{3}{2} \text{ din Bravais.}$$

$$\frac{4-1}{4+3+1} R \frac{4-1}{3-1} \text{ sau } - \frac{3}{8} R \frac{3}{2} \text{ Miller}$$

și direct din raportul parametric:

$$\frac{1}{2} a: \frac{1}{3} a: \frac{1}{8} c \text{ sau } \frac{3}{2} a: a: \frac{3}{8} c \text{ sau } - \frac{3}{8} R \frac{3}{2} \text{. -}$$

- Pentru a obține proiecțiunea polilor fetelor scalenocdrului, întrebuintăm metoda generală adecă: vom determina proiecțiunea a două cercuri mari care trec prin polul fetei considerate. Vom determina atunci unghiul X pe care 'l fac două fete adiacente, a căror supliment A ne dă unghiul normalcelor la fetele considerate și $\frac{A}{2}$ va fi unghiul pe care 'l fac normala

la o fată în planul ce trece prin axa aa , și prin

axa corespun-

denta $z\bar{z}$

a lui Miller.

Considerând

atunci pla-

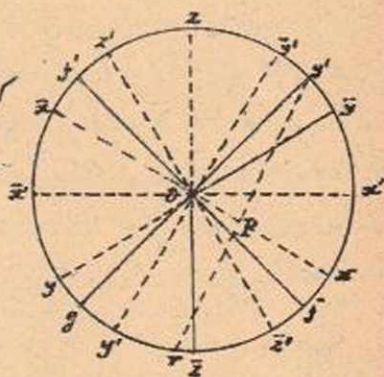
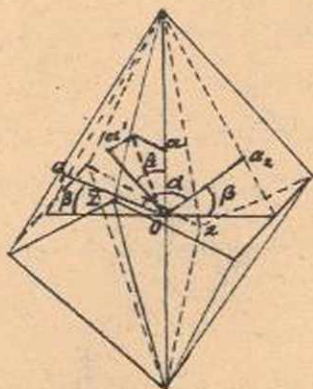
nul coron-

lui de pro-

jectiune,

plecând

din $\bar{z}$ spre

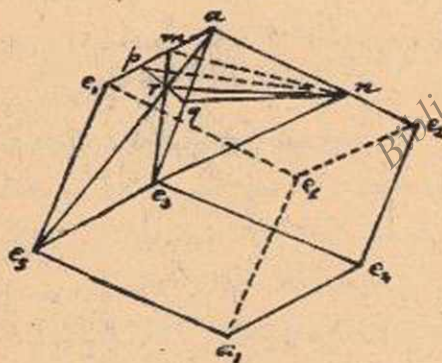


x luăm arcul $\bar{z}f$ egal cu $\frac{A}{2}$ și ducem diametrul corespondent: fOf , care reprezintă proiectia coron-ului mare care trece prin aa , și polul fetei considerate. Ne mai trebuie inclinarea polului deasupra planului de proiectiune; pentru aceasta muchiile laterale nu ne sunt suficiente. Atunci măsurăm unghiul culmenant B a doua fete opuse, corespunzând aceluiași extremități a axei verticale. Acest unghi α va reprezenta unghiul pe care îl face una din aceste normale cu axa verticală. Acest unghi $\frac{\alpha}{2}$ ne permite a afla înclinarea polului deasupra planului de proiectie

caci avem: $\frac{\alpha}{2} + \beta = 90^\circ$ deci: $\beta = 90^\circ - \frac{\alpha}{2}$. . .

Unghiul β este format de normala la fața cu
așa corespondența din planul de proiecțiune.
Deci, plecând din fața $\bar{z}$, vom lua: $\beta = \beta$,
punctul de vedere fiind în q' extremitatea dia-
metrului normal pe ff' . Unind pe r cu q' , obte-
nem cu ff' intersecția P , care reprezintă proiec-
ția polului fetei date. . . .

II. Să considerăm fața e_3mn , care ia distan-
țele: $am = \frac{1}{2}b$, $an = \frac{1}{y}b$ și
 $ae_3 = \frac{1}{x}b$, așa că: $x < y < z$. .



Acastă fața ne-ar con-
duce la un Scalenoedru.
Însă, dacă luăm fața
 pqn , care ia distanțele
 $ap = aq = an$, atunci pla-
nul acestei fete e orizon-
tal și tot fața e_3mn
după dreapta nr , care

reprezintă în același timp intersecția planului
 pqn cu planul de simetrie care trece prin
muchia ae_2 și opusă sa; dreapta nr găsindu-
se în planul pqn , este orizontală. Deci: pla-
nul orizontal care trece prin centrul cristallin

va taie fata e , m n dupa o dreapta orizontala, care reprezinta in acelasi timp intersectia fetelor de sus cu cele de jos, doua câte doua. - Atunci baza Scalenoedrului care e stanga, devine un hexagon regulat si fetele Scalenoedrului care erau triunghiuri Scalene, devin triunghiuri isoscele. Deci in locul Scalenoedrului vom obtine o dubla piramida hexagonala, care este un Isoscelodru. -

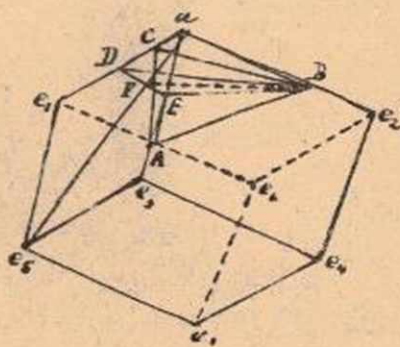
Am vazut ca, conditiunile pentru ca un Scalenoedru sa fie direct sau invers erau:

$$x + z > 2y.$$

Conditia care ramane inca adica:

$$x + z = 2y.$$

este tocmai aceea ce trebuie pentru ca Scalenoedrul sa devina un Isoscelodru. - Aceasta se poate demonstra dupa cum urmeaza:



Fie fata ABC care ia distanțele: $OA = \frac{1}{x}b$, $OB = \frac{1}{y}b$ si $OC = \frac{1}{z}b$; Daca vom lua: $OB = OD = OE$ si vom duce planul orizontal, vom obtine intersectia BF , asa ca: unind A cu F , vom avea diagonala fetei Qe_3 si deci bisectrita unghiului e , Qe_3 .

Atunci în triunghiul COA , OF fiind bisectrița unghiului COA , vom avea: $\frac{CO}{OA} = \frac{CF}{FA} \dots (1)$

Considerând atunci triunghiurile COF și FOA care au același vârf și bazele pe aceeași dreaptă vom avea relațiunile: $\frac{COF}{FOA} = \frac{CF}{FA}$ sau după (1):

$$\frac{COF}{FOA} = \frac{CO}{OA} \text{ de unde putem deduce:}$$

$$\frac{COF + FOA}{FOA} = \frac{CO + OA}{OA} \text{ sau: } \frac{COA}{FOA} = \frac{CO + OA}{OA} \dots (2)$$

De asemenea triunghiurile FOE și FOA au același vârf F și bazele pe aceeași dreaptă, ciace ne dă:

$$\frac{FOE}{FOA} = \frac{OE}{OA} \dots (3)$$

Împărțind (2) prin (3) vom avea:

$$\frac{COA}{FOA} \cdot \frac{FOA}{FOE} = \frac{CO + OA}{OA} \cdot \frac{OA}{OE} \text{ sau: } \frac{COA}{FOE} = \frac{CO + OA}{OE} \text{ sau:}$$

$$\frac{COA}{2FOE} = \frac{CO + OA}{2OE} \dots (4)$$

Însă: $2FOE = DOE$; atunci egalitatea (4) se poate scrie:

$$\frac{COA}{DOE} = \frac{CO + OA}{2OE} \dots (5)$$

De altă parte triunghiurile DOE și COA au vârful în O și vom avea:

$$\frac{COA}{DOE} = \frac{CO \times OA}{DO \times OE} = \frac{CO \times OA}{OE^2} \dots (6)$$

Comparând pe (5) cu (6) vom avea:

$$\frac{CO+OA}{2OE} = \frac{CO \times OA}{OE^2} \text{ sau: } \frac{CO+OA}{CO \times OA} = \frac{2OE}{OE^2} \text{ sau inca:}$$

$$\frac{CO+OA}{CO \times OA} = \frac{2}{OE} \text{ sau:}$$

$$\frac{CO}{CO \times OA} + \frac{OA}{CO \times OA} = \frac{2}{OE} \text{ sau: } \frac{1}{OA} + \frac{1}{CO} = \frac{2}{OE} = \frac{2}{OB}$$

$$\text{Iusa noi avem: } OA = \frac{1}{x}, OB = \frac{1}{y}, OC = \frac{1}{z}$$

Inlocuind in ultima egalitate vom ave:

$$\frac{1}{x} + \frac{1}{z} = \frac{2}{y} \text{ sau: } x+z = 2y \dots (A)$$

Deci: conditiunea pentru ca un Scalenoedru sa devina un Isosceloedru e reprezentata prin relatia (A). —

Asa vom ave Scalenoedrele:

$$b^{\frac{1}{2}} b^{\frac{1}{3}} b^{\frac{1}{4}}, b^{\frac{1}{2}} b^{\frac{1}{4}} b^{\frac{1}{7}}, b^{\frac{1}{3}} b^{\frac{1}{4}} b^{\frac{1}{5}}, \text{ care dau:}$$

$$2+4=2 \times 3, 2+6=2 \times 4, 3+5=2 \times 4$$

si care sunt niste Isosceloedre.

— Dupa Naumann pentru Isosceloedre pe unghiurile α , corespunde raportul parametric general: $2a:2a:\bar{a}$: mc, de unde notatiunea mR_2 . Dupa Bravais avem formula generala $(m \text{ in } 2m2)$. —

$$\text{Asa: } 2a:2a:\bar{a}:\frac{2}{9}c \text{ ne da direct: } \frac{2}{9}R_2$$

In indici dupa Bravais: $(11\bar{2}9)$ si prin transformare dupa Miller: (432) . Solidul este un Isosceloedru caci avem: $n=K$, si $g+s=2r$.

Daca vom sa facem transformarea din Bravais

si Miller in notatiunea Naumann, vom avea:

$$\frac{h+k}{l} R_2 \text{ si } \frac{q-s}{q+r+s} R_2. \text{ Deci: } \frac{1+1}{9} R_2 \text{ si } \frac{4-2}{4+3+2} R_2$$

sau: $\frac{2}{9} R_2.$ —

B). Modificatiu pe unghiurile e .

Aici vom avea inca doua feluri de modificatiu:

a) Simetrice si b) Disimetrice.

a) Modificatiu Simetrice.

1). Sa consideram planul apq , care ia distantite:

$$ae_1 = 1, e_1 p = \frac{1}{2}, e_1 q = \frac{1}{2}$$

Acasta fata va fi notata:

$$b' d^{\frac{1}{2}} d^{\frac{1}{2}} \text{ sau } e^{\frac{1}{2}}.$$

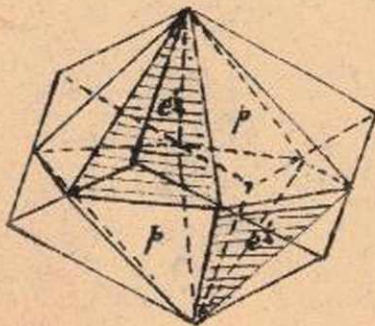
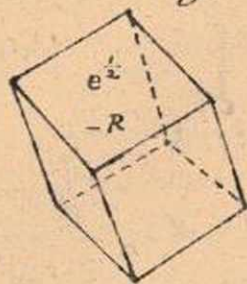
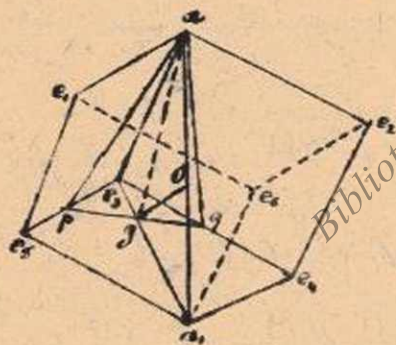
Si cum avem 6 unghiuri

vom ob-
tine un
Solid cu
6 fete ca-
re va fi

un Romboedru invers. Insa noi

observam

ca: $p q e$
una din laturile hexago-
nului format de sectiunea
orizontala prin centrul O .
Axa aO se proiecteaza pe
fata apq , dupa mediana



ag , care este egală cu a, g ca oblice egal departate de piciorul perpendicularei Og , ca și de o parte Og este perpendiculare pe aa , iar de alta: $aO = Ca$. Atunci triunghiurile alg și a, Og sunt egale ca având:

$$ag = ga, \quad aO = Oa, \quad \text{și} \quad Og = Og.$$

Vor avea prin urmare și celelalte elemente egale, deci va fi și: $igaO = ga, O$.

Leia ce însumă că: axa aa , face același unghi cu fețele romboedrului primitiv p ca și cu ale romboedrului invers e^2 , pentru care se dă acestui din urmă numele de: Ecvianglu.

Prin combinarea fețelor romboedrului primitiv cu ale romboedrului invers e^2 , se obține o dublă uramida hexagonală, care nu este alt ceva decât un dizecaedru.

După Kauffman vom avea raportul parametric $a : a : c$ sau notatiunea: $-R-$.

După Bravais avem: $oa : a : \bar{a} : c$ sau $[01\bar{1}1]$.

Pentru a avem notatiunea după Miller, se observă că: axele lui Miller sunt paralele și egale cu cele trei muchii care formează unghiul e , raportul parametric va fi: $\frac{1}{2}a : \frac{1}{2}a : \bar{a}$ sau $a : a : 2a$, de unde notatiunea: $[22\bar{1}]$.

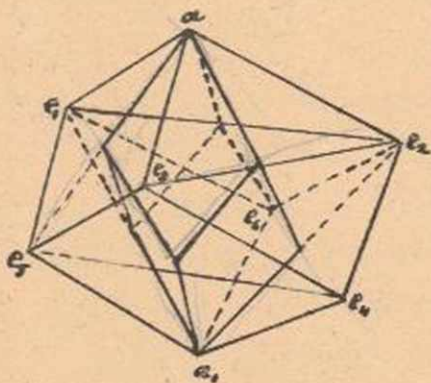
Proiecțiunea polilor fețelor romboedrului negativ se face ca pentru romboedrul pozitiv

insa totu se vor gasi pe portiunile negative: Ox , Oy , Oz a axelor. Si sunt:

$P_1(221)$, $P'_1(\bar{1}22)$ si $P''_1(2\bar{1}2)$. -
Cercurile mari care trec prin doi din aceste poli, vor forma un triunghi sferic: $P_1 P'_1 P''_1$ a carui pozitie este inversa cu a triunghiului ce corespunde polilor romboedru-
lui pozitiv. Fiind ca po-

tiu romboedru-
lui negativ cad in afara de triun-
ghiul $P_1 P'_1 P''_1$, urmeaza ca acest romboedru este
ascutit. - - -

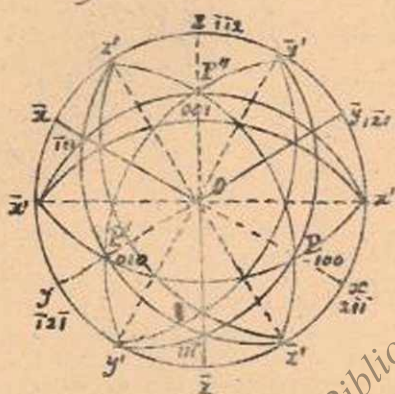
II.) Fie planul ae_1e_2 , care ia pe muchile d si b
distanțe întregi. Acest



plan va ave ca intersec-
tie cu fetele romboedru-
lui, diagonalele acestor
fete, care vor reprezenta
in acelaș timp intersec-
tiile acestor fete cu unele
aplicate pe unghiurile
 e_1 si e_2 , si fiind ca avem
6 unghiuri laterale, vom

obține in definitiv un alt romboedru, care va fi

astfelie dispus față cu Romboedrul primitiv, în
cât fețele sale vor corespunde muchilor celui-l-
alt și vice-versa. Axa verticală rămânând
aceiași, acest al doilea Romboedru a fost numit
de către Haüy: Romboedru invers. - Notatiunea
sa va fi: $b'd'd'$ sau $\underline{e'}$. - -



După Naumann acest rom-
boedru corespunde raportu-
lui parametric: $a : a : 2c$
de unde notatiunea - $2R$. -

După Bravais avem:
 $a : a : \bar{a} : 2c$ sau $(02\bar{2}1)$. -
După Miller raportul
este: $a : a : \bar{a}$ sau nota-
ția $(11\bar{1})$. - -

Proiecția polilor fețelor acestui romboedru invers
și ascuțit ne arată că, acești poli sunt cuprinși
între acei ai Romboedrului - R și extremității
axei. Urmăreați dar că: cu cât coeficientul lui
 R e mai mare, cu atât romboedru e mai ascu-
tit și deci polul său mai departat de triunghiul
corespondent romboedrului primitiv. -

III. Să considerăm planul m, e_4, e_5 , care ia pe
muchii distanțele: $e_3, m = \frac{1}{2}b$, $e_4, e_5 = d$,
Această față va fi notată: $b\frac{1}{2}d'd'$ sau: $\underline{\underline{e'}}$. -

Dacă examinăm figura vedem că: diagonalele

e_3, e_5 și e_3, a_1

se întâl-

nesc în

punctul

x care e

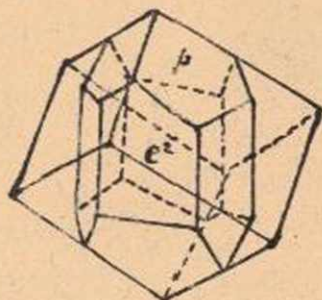
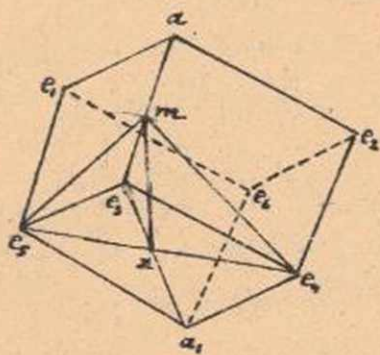
în cen-

trul fe-

ței și în

mijlocul

lui e_3, a_1



căci: $me_3 = \frac{b}{2}$, și $e_3, x = \frac{1}{2} e_3, a_1$. Urmează că: dreapta mx va fi paralela cu aa_1 , și fiind că mx este proiecția axei pe fața me_3, e_5 , aceasta față va fi paralela cu axa aa_1 . Fiind că avem 6 unghiuri laterale, vom avea 6 fețe paralele cu axa; vom obține deci: o prizma hexagonală. -

- După Naumann, această prizma corespunde raportului parametric: $a : a : \infty c$ de unde notatiunea: ∞R . După Bravais vom avea: $\infty a : a : \bar{a} : \infty c$, sau notatiunea: (0110) . -

- După Miller raportul parametric este: $a : a : \frac{1}{2} a$ sau notatiunea: $(11\bar{2})$. -

- Polii fetelor acestor prize hexagonale se vor găsi pe cercul de proiecție, la extremitățile diametrelor ce reprezintă axele lui Miller. -

b) Modificații disimetrice.

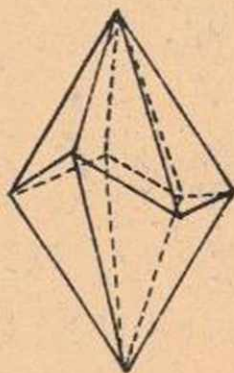
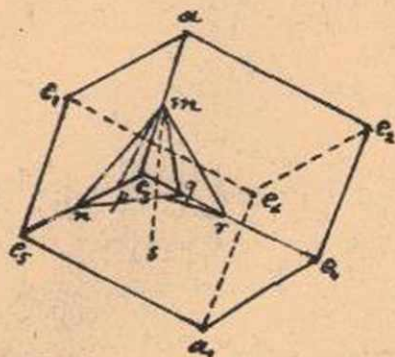
I). Fie fața mng care interceptează lungimile:

$$e_3 m = \frac{1}{x} b.$$

$$e_3 n = \frac{1}{z} d.$$

$$e_3 g = \frac{1}{y} d.$$

Pentru re-
zon de si-
metrie
ne trebuie
o altă fa-
ță sime-
trică mpr.



care ia: $e_3 m = \frac{1}{x} b$, $e_3 p = \frac{1}{y} d$, $e_3 r = \frac{1}{z} d$. Vom avea deci în
locul unghiului e_3 două fațe care se vor tăia după
dreapta ms. - Si, fiind că avem 6 unghiuri latera-
le, vom obține un solid cu 12 fațe, care va fi un:
Scalenocedru. -

Scalenocedrele obținute pe unghiurile e, pot fi:
directe cu condiția: $z - x > 2y$; sau inverse cu
condiția: $z - x < 2y$. -

- După Naumann avem raportul parametric:
na: a: mc. sau notațiunea: $\pm mKn$. -

După Bravais vom avea: na: n'a: $\bar{a}$: mc. sau nota-
țiunea: $(mn', mn, m\bar{n}', n\bar{n})$. -

Pentru formule directe avem condițiunea: $k > K$
și pentru formule inverse: $k < K$. -

După Miller pentru formule directe avem condiția $q-s > 2r$, iar pentru formule inverse: $q-s < 2r$. -

Așa: $\frac{2}{3}a : a : \frac{2}{5}\bar{a} : \frac{1}{2}c$, după Bravais: (3254)

Prin transformare în Miller avem:

$$2. \quad q = 4 + 3 - 5 = 12$$

$$3. \quad r = 4 + 2 - 3 = 3 \quad \text{sau } (4\bar{1}\bar{1}). -$$

$$s = 4 + 5 - 2 = 7$$

Scalenocedrul este direct căci avem: $3 > 2$ și $4 - 1 > 2 \times 1$.

Pentru a face transformarea în Naumann, după indicii lui Bravais și a lui Miller, avem:

$$\frac{3+2}{4} R \frac{3+2}{3}, \frac{4-\bar{1}}{4+1+\bar{1}} R \frac{4-\bar{1}}{4-\bar{1}} \quad \text{sau: } +\frac{5}{4} R \frac{5}{3} -$$

Scalenocedrul: $2a : a : \frac{3}{2}\bar{a}$, după Bravais (1252) - și după Miller: (211) este invers, căci avem:

$$1 < 2 \quad 2 - 1 < 2 \times 1 -$$

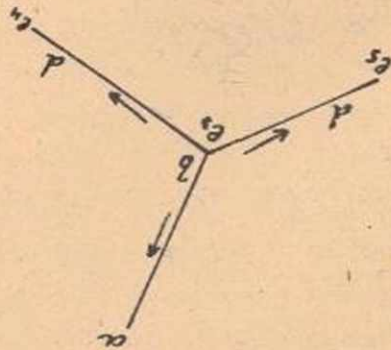
După Naumann vom avea:

$$\frac{1+2}{2} R \frac{1+2}{2}, \frac{2-\bar{1}}{2+1+\bar{1}} R \frac{2-\bar{1}}{1-\bar{1}} \quad \text{sau: } -\frac{3}{2} R \frac{3}{2} -$$

- Polii fetelor Scalenocedrilor pe unghiurile $\angle$ vor cădea: pentru Scalenocedrele directe, în triunghiurile formate de polii: (100)/(210)/(101) și (010)/(120)/(011). Pentru Scalenocedrele inverse în spațiul format de: (120)/(210)/(101)/(011). - - -

- Scalenocedrele pe unghiurile $\angle$ pot deveni isoscolocdre. Pentru a stabili relațiunea care există între x, y, z , observăm că: distanțele luate pe cele trei muchii, nu sunt măsurate toate în același

sunt ca punctu Scalei noilor pe a : distanța pe
 a muchea $\bar{b}$ este luată în sens
 contrar, așa ca $\bar{x}$ devine
 negativ, și condiția punctu
 a are Scalei noilor devine:



$x - x = 2y$
 from arc:
 $2\frac{1}{2}d\frac{1}{2}d\frac{1}{2}$ in case 8-2 = 2×3
 $2\frac{1}{2}d\frac{1}{2}d\frac{1}{2}$ " 5-3 = 2×1
 $2\frac{1}{2}d\frac{1}{2}d\frac{1}{2}$ " 5-1 = 2×2

Dupré, Hermann, gentis isosceles de se unghim
 rle ē, corollunde raphortū parametric: $2a : a : me$
 de unde notatio: $m R_2$ Dupré Bravais: $(m m_2)$.
 Dupré Miller formula ce rezultă prin transformare
 $A_2 a : 2a : 2a : a : \frac{3}{4} c$ da Dupré Bravais: (2243) .
 Dupré Miller: (311) Solidul este un isosceles de
 can. axim: $2 = 2$, $4 \cdot 3 - 1 = 2 \times 1$

correct answer: $2 = 2$, $2 \cdot 3 - 1 = 2 \times 1$

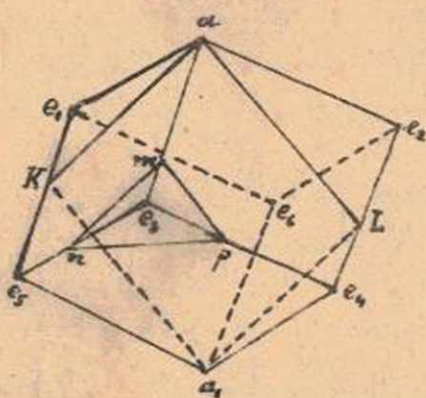
Dupré-Koumann deducem direct: $\frac{3}{4}R_2$ in prim

- Letz. Seiden wasserscheider je ungenügend e. cal
3+1+1
3
je exakt bei Bravais, in die 210 in (101) etc. -

II. Dacă fiște scuturându-l din paralele cu
ana, de vor forma atunci o trifurcă dodecagona.
În adevăr: Ia considerăm înaint de simetrie

$\alpha_2, \alpha_1, \epsilon_1$ come continue ana α_1 facend ja traza
 prin α_1 in alt plan curvare. Incum α_1, ϵ_1 ,

acest plan va fi vertical și va tăia fațetele rombo-
edriului după dreptele ak



și a_1L , determinând pe
muchia e_1e_2 și e_2e_3 seg-
mentele: $e_1K = e_1L$ și
 $e_2K = e_2L$... (a)

Dacă considerăm plu-
nul mnp paralel cu
 aKa_1 , vom obține destău-
teli e_3n și e_3p , pe muchiile
d, care sunt inegale; si-
metria care o a doua

față, și fiind că sunt 6 unghiuri e , vom avea în de-
finitiv 12 fațete verticale, care vor forma prizma
dodecagonală. —

Putem să arătăm că: prizma dodecagonală
este un caz particular al Scalenoedrelor pe un-
ghiurile laterale. În adevăr: Să considerăm
în figura precedentă triunghiurile: ae_1K și e_3mn ,
care sunt asemenea și dau: $\frac{e_1K}{ae_1} = \frac{me_3}{e_3n}$... (1)

De asemenea: triunghiurile: ae_2L și me_3p ne dau:
 $\frac{e_2L}{ae_2} = \frac{me_3}{e_3p}$... (2)

Adunând (1) cu (2) vom avea:

$$\frac{e_1K}{ae_1} + \frac{e_2L}{ae_2} = \frac{me_3}{e_3n} + \frac{me_3}{e_3p} = me_3 \left[\frac{1}{e_3n} + \frac{1}{e_3p} \right]$$

In : $ae_1 = ae_2$ deci: $\frac{e_1K + e_2L}{ae_1} = me_3 \left[\frac{1}{e_3n} + \frac{1}{e_3p} \right]$

Si fiind cã: $e_2L = e_3L$ atunci: $e_1K + e_2L = e_1K + e_3L = e_1e_3$

Deci: $\frac{e_1e_3}{ae_1} = 1 = me_3 \left[\frac{1}{e_3n} + \frac{1}{e_3p} \right]$ sau $\frac{1}{me_3} = \frac{1}{e_3n} + \frac{1}{e_3p}$

Si fiind cã: $me_3 = \frac{1}{x}$, $e_3n = \frac{1}{y}$ si $e_3p = \frac{1}{z}$ vom avea:

$$\frac{1}{\frac{1}{x}} = \frac{1}{\frac{1}{y}} + \frac{1}{\frac{1}{z}} \quad \text{sau:} \quad x = y + z \dots \{b\}$$

Exemple: $b^{\frac{1}{2}} d^{\frac{1}{4}} d^{\frac{1}{4}}$ care dă: $b = 4 + 2$

$$b^{\frac{1}{3}} d^{\frac{1}{3}} d^{\frac{1}{3}} \quad 5 = 3 + 2$$

— Polii fetelor prizmăi dodecagone cad pe circumferința cercului de proiecțiune și vor fi cuprinși între polii fetelor protoprizmăi și a denteroprizmăi.

— Dacă ni se dă: $a : \frac{1}{4}a : \frac{1}{5}a : \infty$, avem după Bravais: (1450) și după Miller (213) Aici avem:

$3 = 2 + 1$. După Neumann avem direct: $\frac{1}{4}a : \frac{1}{5}a : \infty$
sau $\frac{5}{4}a : a : \infty$ sau: $\infty R \frac{5}{4}$. —

Prin transformare avem:

$$\infty R \frac{h+K}{K} \text{ și } \infty R \frac{q-s}{r-s} \text{ sau } \infty R \frac{1+4}{4} \text{ și } \infty R \frac{2-5}{1-3} \text{ sau } \infty R \frac{5}{4}$$

II. Modificatii pe muchi.

Acste modificatii sunt de doua feluri: A) Pe muchile b și B) Pe muchile d.

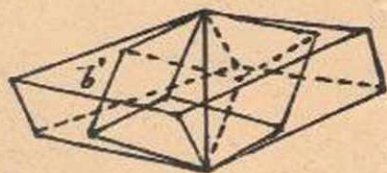
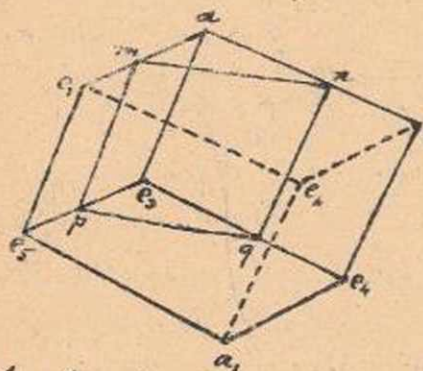
A. Modificatii pe muchile b. Ele pot fi:

a) Simetrice și b) Disimetrice.

a) Modificații simetrice.

Fie planul $mnpq$, paralel cu muchea ac , și care ia

distanțele
 $am = an =$
 $\frac{1}{2}b$. Fiind
 că sunt
 6 muchi
 vom avea
 un solid
 cu 6 fețe
 care va fi
 un Rom-



boedru invers notat: $b^{\frac{1}{2}} b^{\frac{1}{2}} b^{\frac{1}{2}}$ sau: b' .

Fiind că axa principală a acestui Romboedru este aceeași cu a Romboedrului primitiv, Haüy l'a numit Ecvi-ax.

După Naumann acest Romboedru corespunde raportului parametric: $a : a : \frac{1}{2}c$, de unde notațiunea: $-\frac{1}{2}R$. Pentru Bravais avem: $\infty a : a : \infty : \frac{1}{2}c$

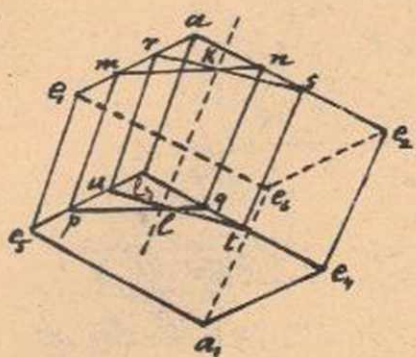
sau $(01\bar{1}2)$ și după Miller: $a : a : \infty a$ sau (110) .

- Polii fețelor acestui Romboedru cad la intersecția cercului mare care trece prin 2 poli ai Romboedrului primitiv cu coordonate negative a axelor lui Miller.

b) Modificații disimetrice.

Să considerăm planul $mnpq$ paralel cu muchea

ae_3 , luând distanțele: $am = \frac{1}{2}b$, $an = \frac{1}{2}b$. Simbolul fetei va fi: $b^{\frac{1}{2}}b^{\frac{1}{2}}b^{\frac{1}{2}}_{100}$ sau $b^{\frac{3}{2}}_{100}$.



Pentru rețea de simetrie va trebui un alt plan rstu care ia aceleași distanțe pe muchiile b însă în ordin invers. Înlocuim astfel muchia ae_3 prin două planuri. Dacă facem aceeași operațiune pe cele 6 muchii ale Romboedrelui, vom

obține un Scalenoedru pe muchiile b . —

Putem avea Scalenoedre directe sau inverse, — după cum vom avea: $2 > 2y$ sau $2 < 2y$. —

Asa: $b^{\frac{1}{2}}b^{\frac{1}{2}}b^{\frac{1}{2}} = b^{\frac{3}{2}}$ sau $6 > 2 \times 2$ Scalenoedru Direct.

$b^{\frac{1}{2}}b^{\frac{1}{2}}b^{\frac{1}{2}} = b^{\frac{4}{2}}$ „ $4 > 2 \times 1$ „

și $b^{\frac{1}{2}}b^{\frac{1}{2}}b^{\frac{1}{2}} = b^{\frac{3}{2}}$ „ $3 < 2 \times 2$ „ Invers

$b^{\frac{1}{2}}b^{\frac{1}{2}}b^{\frac{1}{2}} = b^{\frac{4}{2}}$ „ $4 < 2 \times 3$ „

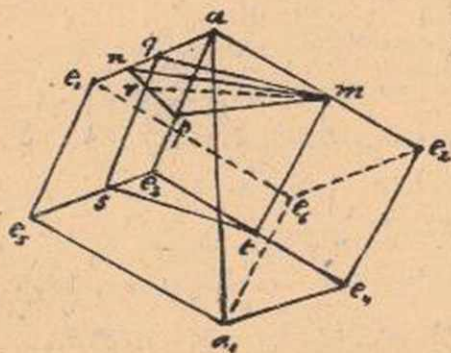
Fiind dat: $\frac{1}{2}a : a : \frac{1}{3}a : \frac{1}{4}c$, avem după Bravais: (2134) și după Miller: (310). Scalenoedrul este direct căci avem: $h > K$, $q > 2r$. După Naumann

avem direct: $\frac{1}{2}a : \frac{1}{3}a : \frac{1}{4}c$ sau $\frac{3}{2}a : a : \frac{3}{4}c$. De unde notatia: $+\frac{3}{4}R\frac{3}{2}$. Prin transformatie avem:

$$\left. \begin{array}{l} \frac{h+K}{l} R \frac{h+K}{h} \text{ sau } \frac{2+1}{4} R \frac{2+1}{2} \\ \frac{q-s}{q+r+s} R \frac{q-s}{q-r} \text{ sau } \frac{3-0}{3+1+0} R \frac{3-0}{3-1} \end{array} \right\} + \frac{3}{4} R \frac{3}{2}$$

- Pentru a ave isosceloedre e de ajuns a ave:

$z = 2y$. - În adevăr: am văzut că, dacă înlocuim unghiul culminant a prin planuri, și dacă intersecția acestor planuri cu planul orizontal a triunghiului co-lateral a Romboedru-lui este paralelă cu una din medianele acestui triunghi, Solidul



obținut este un Isosceloedru. În cazul actual dacă planul dus paralel cu muchia ae_3 trece prin m așa ca: $am = \frac{1}{y}b$, acest plan trebuie să treacă și prin r, mijlocul lui np și prin q mijlocul lui $an = \frac{1}{y}b$, căci qs trebuie să fie paralel cu ae_3 . Deci: $am = 2aq$ sau $\frac{1}{y} = 2 \times \frac{1}{2}$ și deci:

$$z = 2y.$$

În acest caz nu avem de cât un singur isosceloedru: $b^{\frac{1}{2}} b^{\frac{1}{2}} b^{\frac{1}{2}}$ sau $b^{\frac{3}{2}}$. - - -

corespunzând raportului parametric: $2a:2a:\bar{a}:\frac{2}{3}c$. sau după Bravais: $(11\bar{2}3)$ și după Miller: (210) . -

După Naumann avem direct: $\frac{2}{3}R_2$ și prin transformări, plecând de la Bravais sau Miller:

$$\frac{h+k}{l} R_2 \text{ sau } \frac{1+1}{3} R_2 \text{ sau } \frac{2}{3} R_2 \text{ și } \frac{q-r}{q+r+s} R_2 \text{ sau } \frac{2-0}{2+1+0} R_2 \text{ sau } \frac{2}{3} R_2.$$

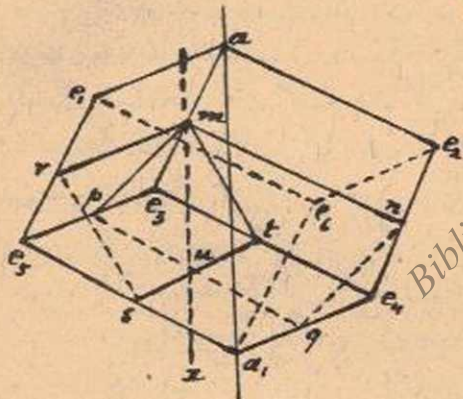
Polii fetelor acestui isoscedru se găsesc la intersec-
tia cercurilor mari ce trec prin poli Rombodru-
lui primitiv, cu acele lui Bravais. --

B). Modificatî pe muchile d. --

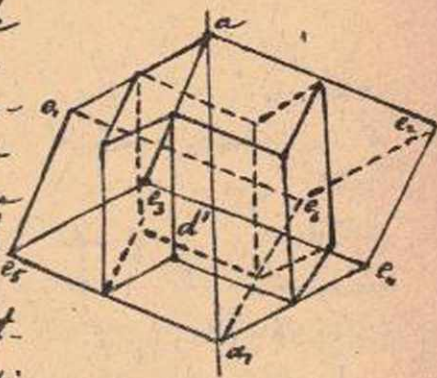
Acoste modificatî pot fi: a) Simetrice și b) Disi-
metrice. --

a). Modificatî simetrice. --

Să considerăm un plan paralel cu una din mu-
chile d , lu-



ând pe cele
l. alte do-
ua distan-
te propor-
ționale cu
lungimile
lor. Vom
obține ast-
fel în fața:



$d^{\frac{1}{2}} b^{\frac{1}{2}} d^{\frac{1}{2}} = d'$. -- Fiind că sunt 6 muchi, vom obține
6 fețe, care sunt verticale, fiind că intersecția
lor mx este paralelă cu aaa_1 . Solidul care
rezultă este: Prizma hexagonală d' . --

După Naumann aceasta prizmă corespunde
raportului parametric: $a : 2a : \infty$ sau ∞R_2 . --

După Bravais avem: $a : 2a : \bar{a} : \infty$ sau: $(11\bar{2}0)$. --

După Miller: $a : pa : \bar{a}$ sau: $(10\bar{1})$. --

Proiecția polilor fetelor acestei prizme se găsesc.

pe circumferința cercului de proiectiune, la extremitățile pozitive și negative ale axelor lui Bravais.

b) Modificatii disimetrice.

Să considerăm planul ae_1nm paralel cu muchia e_3e_4 , care ia distanțele:

$ae_3 = b$, și $e_3m = \frac{1}{2}d$. Simbolul fetei va fi: $b'd'd^{\frac{1}{2}}$ sau $\underline{d^2}$.

Pentru rașon de simetrie trebuie un alt plan a_1e_5pq , care tăie fața firecedentă după st paralela cu e_3e_4 . Vom obține deci un solid cu 12 fețe, a căror intersecție laterală sunt

paralele cu muchiile laterale ale Romboedru-
lui, ceea ce ne va da un nou Scalenocedru.

De asta dată nu avem de căt Scalenocedru direct precum: $b'd'd^{\frac{1}{2}}$ sau $\underline{d^2}$; $b'd'd^{\frac{1}{2}}$ sau $\underline{d^3}$.

Acestor Scalenocedre corespund raporturile parametrice și notatiunile Bravais și Miller:

$$\frac{1}{2}a : a : \frac{1}{3}a : c \text{ sau } (21\bar{3}1) \text{ și } (20\bar{1})$$

$$\frac{1}{3}a : a : \frac{1}{4}a : \frac{1}{2}c \text{ și } (3142) \text{ și } (30\bar{1})$$

După Naumann avem direct:

$$\frac{1}{2}a : \frac{1}{3}a : c \text{ sau } \frac{3}{2}a : a : 3c \text{ sau } 3R\frac{3}{2}$$

$$\frac{1}{3}a : \frac{1}{4}a : \frac{1}{2}c \text{ și } \frac{4}{3}a : a : 2c \text{ și } 2R\frac{4}{3}$$

Prin transformare avem:

$$\frac{2+1}{1} R \frac{2+1}{2} \text{ sau: } \frac{2-1}{2+0+1} R \frac{2-1}{2-0} \text{ sau } 2R \frac{2}{2} \text{ si}$$

$$\frac{3+1}{2} R \frac{3+1}{3} \text{ " } \frac{3-1}{3+0+1} R \frac{3-1}{3-0} \text{ " } 2R \frac{2}{3} \text{ "}$$

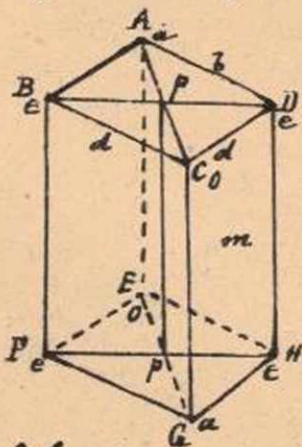
Nu există isosceloedre corespunzătoare acestor Scalenoedre. —

Polii fețelor acestor Scalenoedre pe muchiurile d se găsesc cuprinși între polii Rombocedrului primitiv și polii fețelor denteroprizmei. —

VI.

Sistemul Clinorombic.

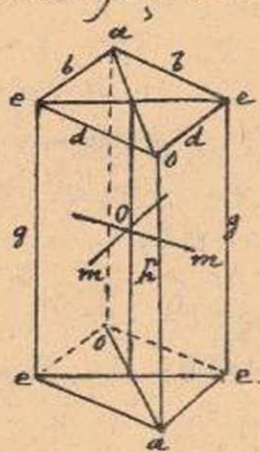
După Levy, forma primitivă a acestui Sistem este: Prizma Oblică cu



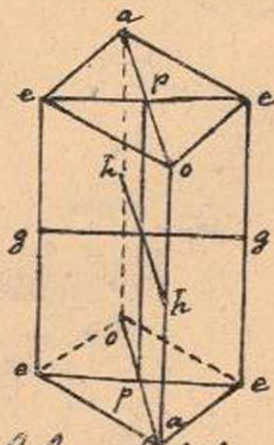
baza de Romb. Se așază de ordină această prizma așa ca: baza superioară să fie înclinată d'indărăpt înainte și ca diedrul lateral obțuz să fie în față. Elementele acestei prizme sunt: 2 baze p care sunt niste romburi și 4 fețe laterale m care sunt niste paralelograme. — Muchiile sunt de mai multe specii.

muchile baze AB și AD sunt identice, corespund la diedre ascutite și sunt notate: $\underline{b}$; - pe când muchile BC și CD sunt egale, corespund la diedre obtuze și sunt notate $\underline{d}$. - Muchile laterale sunt asemenea de două specii: muchile BF și DH corespund la diedre ascutite și sunt notate $\underline{g}$, pe când AE și CE sunt obtuze și notate $\underline{h}$. - Unghiurile solide sunt de asemenea de 3 feluri: A și C egale și notate $\underline{a}$; C și E egale și notate $\underline{o}$; pe când B, D, F, H sunt egale și notate $\underline{e}$.

Axele lui Levy sunt dreptele care reunesc centrele fetelor opuse și sunt paralele cu cele



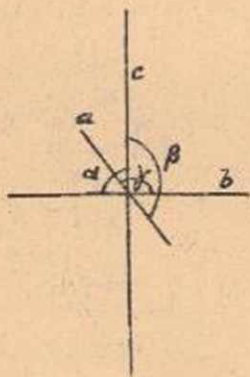
trei muchii
se formează
un unghi
solid. El se
obține prin
intersecția
planurilor
care trec
prin mijlo-
curile mu-



chilor baze opuse și sunt paralele cu fetele prisme. În acest caz axa verticală, care unește centrele celor două baze, se cheamă axa principală, iar cele lalte două sunt axele laterale.

Dacă ducem planuri care să treacă prin muchiile laterale opuse, ele se intersectează după o linie principală și alte două axe laterale, care unesc mijlocurile muchilor laterali opuse și sunt paralele cu diagonalele rombului de bază. Aceste două axe, după poziția dată prismei sunt așa dispuse încât cea care reunește muchile g este orizontală, pe când cea - l altă este înclinată și îndrăcit înainte. --

— După Naumann acest sistem numit Monoclinic este caracterizat prin un sistem de trei axe, din care: o axă verticală numită axă principală, apoi o axă orizontală perpendiculară pe axa principală numită ortodiagonala și a treia axă normală la ortodiagonali, dar oblică față de axa principală și care se cheamă.



Clinodiagonala. Dacă însumăm cu α, β, γ , unghiurile axelor avem:

$$\alpha = \gamma = 90^\circ \text{ și } \beta \neq 90^\circ.$$

Parametrii corespunzători axelor sunt: a pentru clinodiagonala, b pentru ortodiagonala, și c

pentru axa principală. - Pentru a arăta că o formă se raportează la Orto sau Clinodiagonală, se întrebuintează semnele: - sau $\sim$, care se pun deasupra simbolului, ca și la sistemul ortorombic. - -

- După Naumann prisma Clinorombică se numește: Prisma monoclinică și corespunde raportului parametric: $a:b:c$, de unde notațiunea: ∞P . -

Fetele de bază p , care se numesc fete de Bazipinacoid corespund raportului parametric: $a:b:0c$, - și sunt notate: OP . -

Notatiunea după Miller se face în raport cu aceleași axe ca a lui Naumann, așa ca vom avea pentru fetele de prismă notatiunea (110) și pentru bazipinacoid (001). - -

- Prisma monoclinică are ca plan de simetrie planul care trece prin Clinodiagonală și muchie h și ca axa de simetrie axa orizontală care are o simetrie binară. - Din această cauză fetele sunt simetrice numai în raport cu planul de simetrie și fiind că formele nu sunt întregi, dar numai pe jumătate, Naumann le dă numele de: Hemiforme Ele sunt: anterioare sau negative când corespund lui β obtuz, și posterioare sau pozitive, când corespund lui β ascuțit. - -

— Prizma monoclinică ne având decât un plan de simetrie, nu poate da decât forme holocedrice. Ele se pot obtine: 1° Prin modificări pe muchii și 2° Prin modificări pe unghiuri. —

1° Modificări pe muchii.

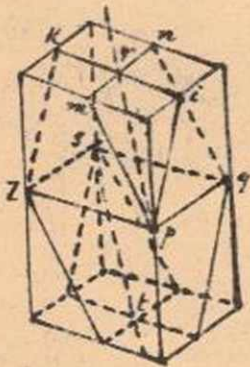
Modificările pe muchii sunt de două feluri:

A). Pe muchile bazice și B). Pe muchile laterale.

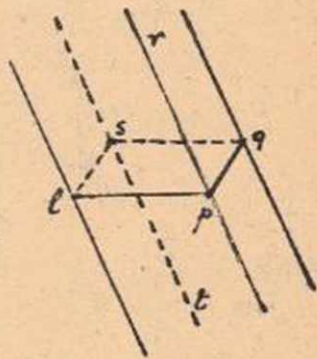
A). Modificări pe muchile bazice.

Aici nu avem decât modificări simetrice și pot avea loc: 1) Pe muchile d și 2) Pe muchile b . —

1). Dacă înlocuim muchile bazice d , prin planuri



paralele cu aceste muchii și care s-au pe cele lalte muchii des-tante propor-tionale cu lungimile lor, se obțin

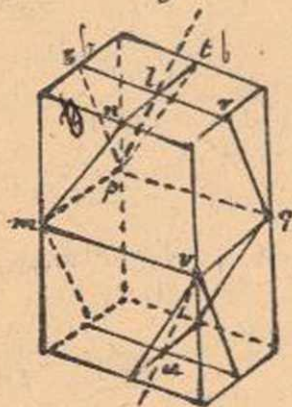


batu fete notate: $d^0 d^{\frac{1}{2}} h^{\frac{1}{2}}$ sau $d^{\frac{1}{2}}$; aceste fete se taie două câte două sus și jos după dreptele pr și st , și determină o zonă închisă pe de laturi, deschisă la capete și înclinată în direcția pr . —

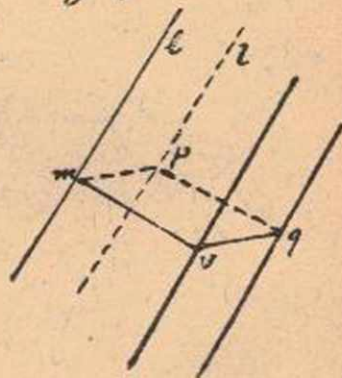
— După Naumann, aceste fete corespund

raportului parametric: $a : b : mc$ și fiind că co-
respund unghiului obtuz, se numesc: fete de
Protohemipiramida anterioară negativă și
sunt notate: $-mP$. Când $m=1$, notația
devine: $-P$. După Miller avem: $\{mm1\}$ și $\{111\}$.
Piramida pentru care: $m=1$ se numește fun-
damentala. — —

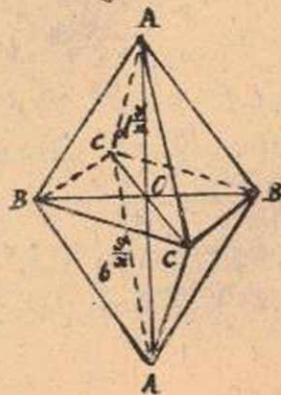
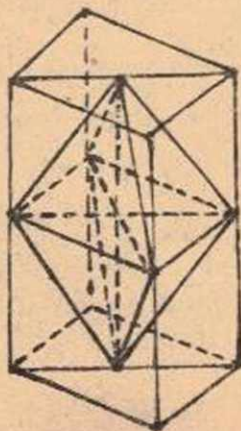
2) Dacă facem modificatii analoage pe muchiile



b. vom obtine
o alta formă
de 4 fete in-
clinată pa-
ralel cu in-
tersecția lp
a căror no-
tație este:
 $b^{\frac{2}{3}} b^{\frac{1}{3}} h^{\frac{1}{3}}$ sau:
 $b^{\frac{2}{3}}$.



După Naumann aceste fete corespund raportului
parametric
 $a : b : mc$ și
formează:
Protohemipiramida
posterioară
pozitivă no-
tata: $+mP$.



După Miller se notează (m m 1). -

Dacă considerăm în același timp modificările pe muchile d și pe muchile b , se obține un: Octaedru oblic cu baza de romb, a cărui față sunt niste triunghiuri scalene, din care: patru față $d^{\frac{1}{2}}$ și celelalte $b^{\frac{1}{2}}$. - După Nauman solidul se numește: Protopiramida și are notațiunea: $\pm mP$. -

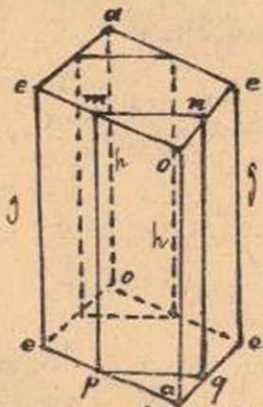
B. Modificări pe muchile laterale.

Ele pot fi de două feluri:

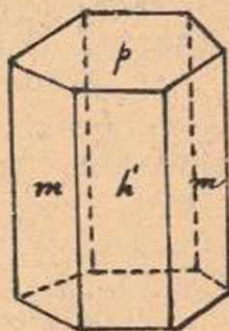
a. Modificări simetrice.

Aceste modificări pot avea loc: 1) Pe muchile h și 2) Pe muchile g . -

1). Să înlocuim muchile laterale h prin pla-



ni paralele cu aceste muchi, luând pe muchile bazei distanțe proporționale cu lungimile lor. Vom obține două fețe



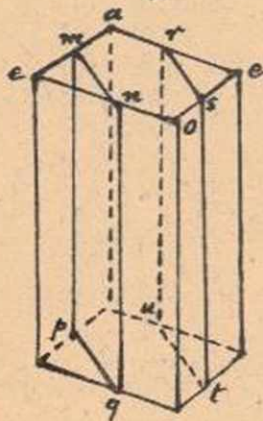
notate: $h^{\frac{1}{2}}$ $b^{\frac{1}{2}}$ sau h' . - -

Solidul care rezultă din combinarea fețelor primă cu fețele h' , are aspectul unei prisme hexagonale oblice. - - -

După Naumann aceste fețe corespund raportului parametric: $a : \infty b : \infty c$ și fiind că sunt paralele cu Ortodiagonala, se numesc: fețe de Ortopinacoid, notate: $\infty P \infty$. -

După Miller avem notatiunea: (100) .

2). Dacă facem aceleași modificări pe muchi-

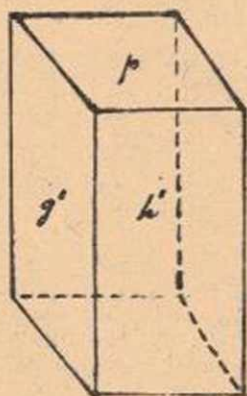


le q vom obține fețele: $g, \frac{1}{2}b, \frac{1}{2}d$ sau g' , care combinate cu fețele P și Q înșur dau un solid care are forma unei prizme hexagonale oblice.



gonale oblice. -

După Naumann fețele g' corespund raportului parametric: $a : b : \infty c$ și sunt notate: $\infty P \infty$. - Se numesc fețe de Clinopinacoid fiind paralele cu Clinodiagonala. -

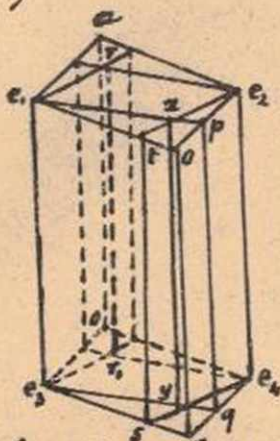


După Miller: (010) . - Dacă considerăm în același timp modificările pe muchile h și g se obține un solid cu forma prismatică oblică cu baza dreptunghi-

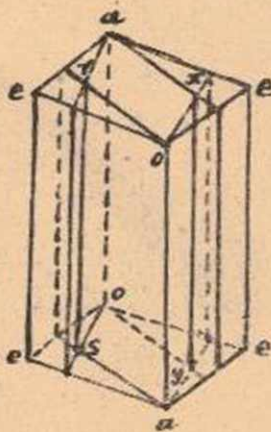
care e considerată de unii cristalografici forma primitivă a acestui sistem. Aceasta prismă este combinarea celor trei finacrișuri. — — —

b). Modificatii disimetrice. —

1) Fie planul tse, e_2 paralel cu muchia $\overline{h}$, interceptând pe muchiile d lungimile: $ot = \frac{1}{x} d$, $oe_2 = d$. Pentru reșon de simetrie va trebui un alt plan: pge, e_1 , care să iec: $op = \frac{1}{x} d$, și $oe_1 = d$. Aceste fete vor fi notate: $d' d'' h''$ sau h'' . —



Elle se taie după dreapta xy paralela cu axa verticală. Dacă facem aceluși modificatie și pe cea l. altă muchie h , vom obține un solid prismatic a cărei bază este un romb lungit în direcțiunea ortodiagonalei și care se numește: Ortoprismă. — — —



După Naumann aceasta prismă corespunde raportului parametric a: mb: oc de unde notațiunea ∞Pm .

După Miller: $(m01)$. —

2) Dacă facem același modificatie pe muchiile g vom obține o altă prismă notată

$g^{\frac{1}{2}} d^{\frac{1}{2}}$ sau g^x . -- La vafi lungita după Clinodiana si se numeste după Naumann: Clinoprizma. Raportul parametric corespunzător vafi: $ma : b : \infty c$, de unde notatiunea: ∞Pm . După Miller: $(1m0)$. --

2. Modificări pe unghiuri.

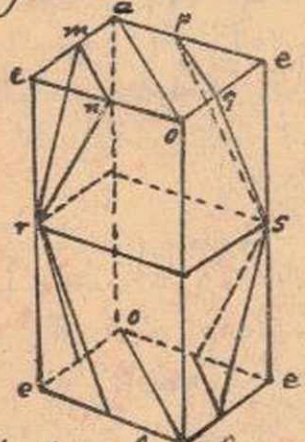
Acste modificatii sunt de trei feluri: A) Pe unghiurile e ; B) Pe unghiurile a si C) Pe unghiurile o . --

A.) Modificatii pe unghiurile e .

Ele sunt de două feluri: a) Simetrice si b) Disimetrice.

a). Modificatii simetrice.

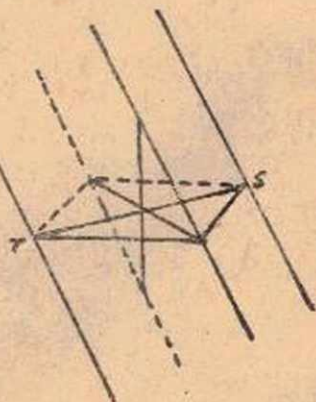
Cele patru unghiuri e ale prizmei Clinorombice fiind egale, se pot modifica în același timp prin planuri care interceptează pe cele trei muchii



formând
distanțe pro-
portionale
cu lungime-
le lor. Acos-
te fețe vor
fi notate:

$$b^{\frac{1}{2}} d^{\frac{1}{2}} g^{\frac{1}{2}} \text{ sau } e^x.$$

Acste fe-

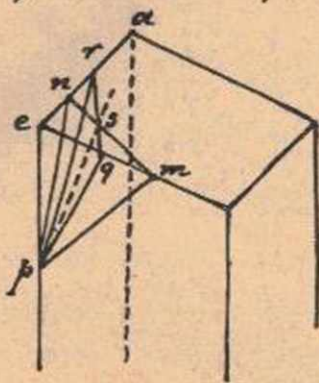


țele bazele prizmei după dreptele paralele cu Clinodiana ($mn \parallel pq \parallel ao$), si dau nastere la un solid prismatic lungit după Clinodiana

După Naumann aceste fete corespund raportului parametric: $a : b : mc$, se cheama fete de Doma și fiind că ele sunt paralele cu Clinodiagonala, Solidul se numeste: Clinodoma și este notat: $mP\delta$. - După Miller: $(0m1)$. -

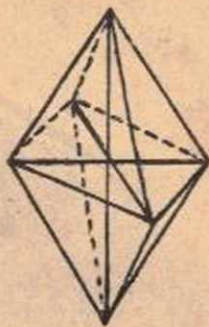
b). Modificații disimetrice.

Fie planul mnp care modifică un unghi ϵ luând



pe cele trei muchi, care-l formează, distanțele: $cm = \frac{1}{2}d$, $en = \frac{1}{2}b$, $ep = \frac{1}{2}g$. Această față va fi notată: $d^{\frac{1}{2}}b^{\frac{1}{2}}g^{\frac{1}{2}}$. Pentru rezon de simetrie va trebui o altă față: pqr care să ia: $eq = \frac{1}{2}d$, $er = \frac{1}{2}b$, $ep = \frac{1}{2}g$. Aceste

două fete vor avea ca intersecție dreapta ps . Vom înlocui deci unghiul ϵ prin două fete. Dacă înlocuim toate unghiurile ϵ în același mod, vom obține o piramidă lungită după Clinodiagonală și care se cheama după Naumann: Clinopiramidă. Fetele sale sunt de două specii: cele patru, care corespund unghiului β obtuz formează: Hemiclinopiramidă.



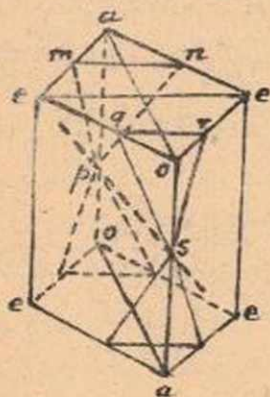
anterioara negativă și corespund raportului parametric: $na : b : mc$, de unde notațiunea $-mPn$ și după Miller: $(\bar{m} \ mn \ n)$; iar cele 4 alte patru fețe corespund etoare lui β ascuțit formeașă o: hemidolno piramida posterioară pozitivă, corespundind raportului parametric $n\bar{a} : b : mc$. de unde notațiunea: $+mPn$, și după Miller: $(\bar{m} \ mn \ n)$. --

B. Modificatūre unghiurile a.

Aceste modificatū pot fi: a) Simetrice, b) Disimetrice.

a) Modificatū simetrice.

Fiind că nu sunt de cât două unghiuri a, înlocuindu-le prin câte o față, care



sa iee pe muchile corespunzătoare distanțe proporționale cu lungimile lor, vom obține două fețe notate după Say:

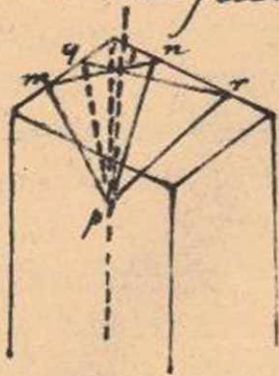
a^2 și care se cheamă după Naumann, fețe de Hemioctodoma posterioară pozitivă și corespund raportului pa-

rametric: $\bar{a} : ob : mc$ și sunt notate: $+mP\bar{o}$ și după Miller: $(\bar{m} \ 01)$. --

b) Modificatū disimetrice.

Prin modificatū disimetrice, analoage cu

acele ce am făcut pe unghiurile e se obțin fetele.



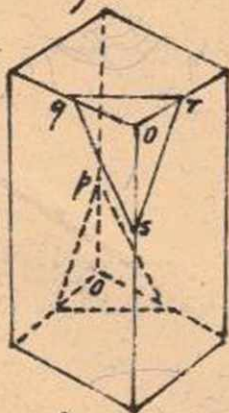
$b^{\frac{1}{2}} b^{\frac{2}{3}} h^{\frac{1}{2}}$ a unei hemioctopu
ramide posterioare, cores-
pundind după Naumann
raportului parametric
 $a:nb:mc$, de unde nota-
țiunea: $+mPn$, iar du-
pă Miller vom avea nota-
țiunea $(\bar{m}n\bar{n})$.

C. Modificatii pe unghiurile o.

Aceste modificatii pot fi de asemenea: a) Sime-
trice și b) Disimetrice.

a). Modificatii simetrice.

Modificările simetrice pe unghiurile O ne dau



două fete

notate:

$d^{\frac{1}{2}} d^{\frac{2}{3}} h^{\frac{1}{2}}$

sau: $O^{\frac{y}{x}}$

Ele se chea-

ma, după

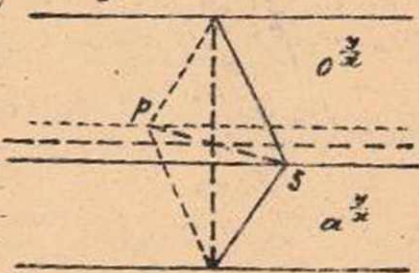
Naumann,

fete de Hemioctodoma anterio-

ra, și corespund raportului pa-

rametric: $a:ob:mc$, de unde notati-

După Miller avem notațiunea: $(x01)$.



Dacă considerăm în același timp modificările simetrice pe unghiurile a și o , obținem un solid prismatic, culcat paralel cu diagonala orizontală și care se cheama: Orthodoma.

- Dacă facem în același timp modificările pe unghiurile e și o , se

obține un Octaedru oblic cu bază de dreptunghi a cărei față sunt de trei feluri: de Clinodoma și $e^{\frac{1}{2}}$ de Hemiorthodoma anterioară $o^{\frac{1}{2}}$ și de Hemiorthodoma posterioară $a^{\frac{1}{2}}$.

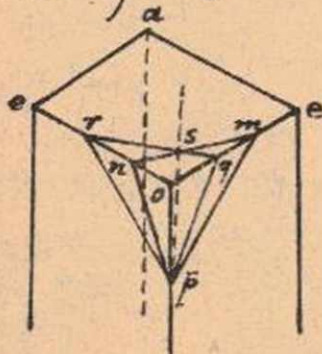
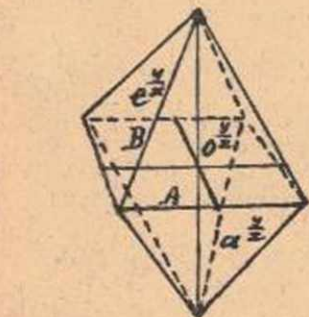
- Această piramidă corespunde Prismei formate

din cei trei pinacoizi. ---

b) Modificată disimetrice. -

Modificările disimetrice pe unghiurile o ne dau fețele de: Hemiortopiramidă anterioară notate:

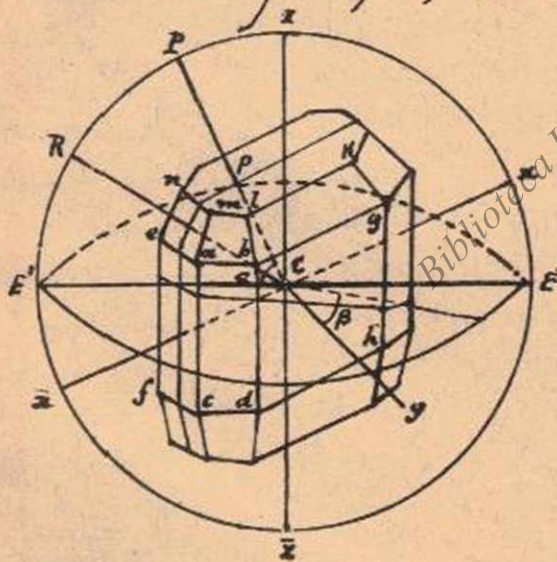
$d^{\frac{1}{2}}$ $d^{\frac{1}{2}}$ $h^{\frac{1}{2}}$, corespunzând după Naumann raportului parametric $a : nb : mc$, de unde urmează notatiunea: - mPn. După Miller: (mn, m n). ---



Pentru a obține proiecțiunea polilor fetelor diverselor forme a acestui sistem, să considerăm un solid compus din principalele fete precum:

- Fata: $abcd$ de prismă
 „ $aefc$ „ ortopinacoid
 „ $bdkg$ „ Clinopinacoid
 „ $bgkl$ „ Clinodoma
 „ $ablm$ „ Piramidă
 „ $amne$ „ Ortodoma

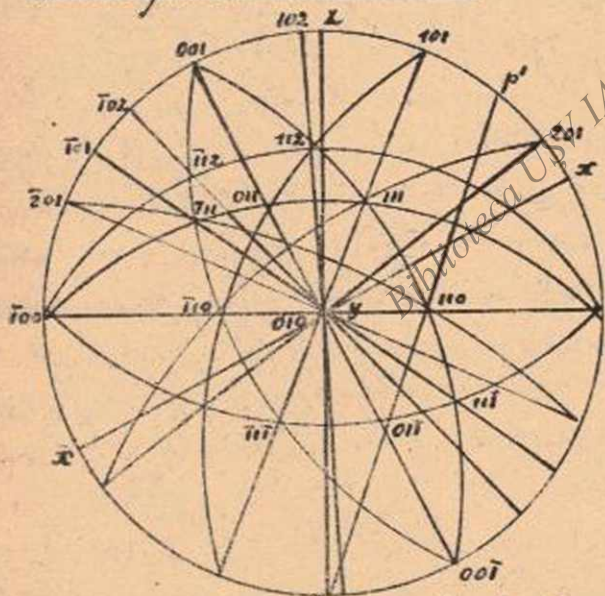
iar deasupra fata de bazipinacoid. Dacă solidul este înscris în sfera de proiecțiune, atunci putem proiecta polii fetelor diverselor forme a acestui sistem, fie pe un plan perpendicular pe axa principală, fie pe un plan care ar trece prin axa principală și clinodiagonala și care ar fi paralel cu



Clinopinacoidul. - Dacă din centrul acestui solid, care se confundă cu centrul sferei, scoborâm perpendiculare pe diversile fete și le prolungim până ce ele întâlnesc sfera, observăm că:

normală la bazipinacoid face cu Clinodiagonala un unghi de 90° ; că polii bazipinacoidului, a Ortodomei și a Ortopinacoidului, se găsesc pe același cerc mare, adică sunt în zonă. De asemenea sunt în zonă: polii fetelor de bazipinacoid cu protopiramida și protoprizma. Vom avea deci de examinat două cazuri:

1) Proiecțiunea pe planul paralel cu Clinopinacoidul. Fie $x\bar{E}\bar{z}E'$ planul cercului de proiecțiune



care conține axa principală zz și Clinodiagonala xx . Este evident că planul principal perpendicular pe axa principală, va conține poli Ortos și Clinopinacoidului și se va proiecta după diametrul perpendicular pe axa trecând

prin centru, iar poli Ortopinacoidului se vor proiecta la extremitățile acestui diametru în (100) și $(\bar{1}00)$. Clinopinacoidul fiind paralel cu planul de proiecțiune, este aplicat la extremitatea

Ortodiagonalei, care este normală la planul de proiectiune: deci polul său se va proiecta în centrul (010). Pentru a determina proiectiunea polului Bazipinacoidului, se măsoară unghiul ce face Ortopinacoidul cu bazipinacoidul a cărui supliment α este unghiul normalilor la aceste fețe. Fiind că proiectiunea polului Ortopinacoidului este determinată, plecând de la acest pol (100), luăm arcul (100 - 001) egal cu α și în (001) se găsește proiectiunea polului bazipinacoidului.

Fiind că fețele de Prizma sunt în formă cu Orto și Clinopinacoidul, polul lor vor căde pe diametrul orizontal între (010) și (100) sau (100). Pentru a determina proiectiunea lor se măsoară diedrul ϕ al protoprizmei cu Clinopinacoidul. Suplimentul β al acestui unghi reprezintă unghiul normalilor la fețele prizmei și al Clinopinacoidului, măsurat prin arcul yP' . Rotund atunci cercul orizontal $E'yp'z$ în jurul lui EE' așa ca y să ajungă în z , punctul de vedere ajunge în $\bar{z}$ și arcul yp' vine de la z spre x , până în p' . Unind punctele p' și $\bar{z}$ se obține cu diametrul orizontal o intersecție care reprezintă proiectia polului feței de protoprizma (110).

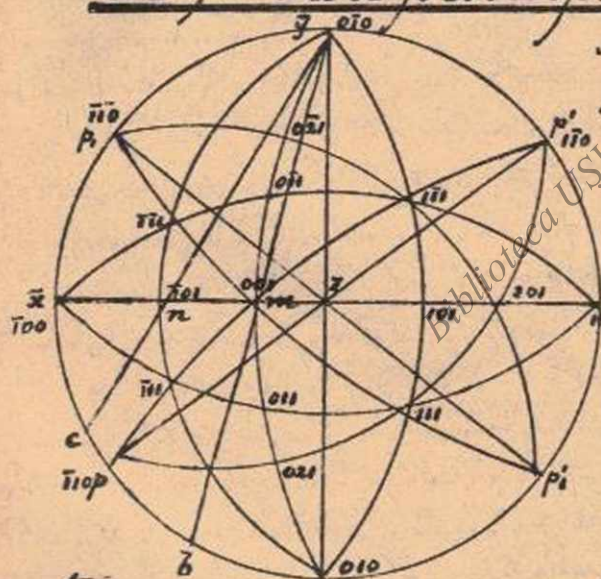
Dacă facem sa treacă prin poli bazipinacoidului si a prizmei un cerc mare, atunci piramida fiind în formă cu bazipinacoidul si prizma polul ei se va găsi pe cercul mare ce trece prin cei doi poli. Pentru a determina pozițiunea polilor, atât a Protopiramidei cât si a tuturor Piramidelor, este de ajuns a determina unghiul pe care aceste piramide l'fac cu bazipinacoidul, de a lua suplimentele lor si apoi plecând de la (001) de a lua spre polul prizmei arcuri egale cu aceste suplimente. Astfel în vom avea poli (111) (112) etc. -

Ortodoma fiind în formă cu bazi si Ortopinacoidul, polul seu se va găsi pe circumferenta cercului de proiectiune: pozițiunea sa va fi determinata ca pentru piramide. Aşa avem poli Ortodomelor: (201), (101), (102). -

Clinodoma fiind în formă cu bazi si Clinopinacoidul, este evident că polul seu se va găsi pe diametrul ce trece prin bazipinacoid si centru, unde este Clinopinacoidul. Pentru a determina pozițiunea sa, vom măsura unghiul ce face Clinodoma cu Bazipinacoidul, vom lua suplimentul, vom rabate cercul ce trece prin normala la Bazipinacoid si polul fetei, în jurul diametrului (001-001). -

Atunci polul cade pe circumferința cercului de proiecțiune la o distanță $(001)-c$, egală cu suplimentul determinat, pe când punctul de vedere vine la extremitatea $\underline{x}$ a Clinodiagonalei. Unind c cu $\underline{x}$, obținem cu diametrul $(001)-(00\bar{1})$ intersecția care determină poziția proiecției polului fetei de Clinodoma (021) sau $(01\bar{1})$ etc. --

2) Proiecțiunea pe planul perpendicular
lar pe axa principală. Axa principală



trece prin axa principală și ortodinoamala, fiind perpendiculară pe planul de proiecție, se va proiecta după un diametru la extremitățile cîrmii se vor găsi poli cîmpinacoidului (010) și $(0\bar{1}0)$. Corect care trece prin axa principală

si polu Ortopinacoidului se va proiecta dupa
un alt diametru perpendicular pe cel intai
la extremitatile caruia se vor proiecta polii
Ortopinacoidului (100) si (100). -

Pentru a proiecta polul Bazopinacoidului ob-
servam ca: acest pol trebuie sa se gaseasca
pe diametrul xx fiind ca Bazopinacoidul
este in forma cu Ortopinacoidul. Si fiind ca
normala la planul Bazopinacoidului in-
coincide cu axa principala, este evident ca
polul sau nu va fi in centru. Atunci mear-
cand diedrul format de Bazopinacoid
cu Ortopinacoidul, luam suplementul sau
 α si de la x spre y luam arcul $xb = \alpha$ si
unind pe b cu y , unde este punctul de ve-
dere obtinem ca xx intersectia m unde va
fi polul Bazopinacoidului (001). - -

Ortodoma fiind in forma cu baza si Orto-
pinacoidul polul sau se va proiecta intre
acei al bazei si a Ortopinacoidului. Masu-
ram unghiul format de Ortopinacoid cu
Ortodoma luam suplementul si plecand
de la x spre y , vom duce valoarea acestui
suplement pana in c ; unind c cu y vom
gasi intersectia n unde se gaseste polul
Ortodomei (101).

Polul Clinodomei se va găsi pe cercul care trece prin baze și Clinopinacoid și va fi determinat ca și pentru Ortodoma. Așa se obțin poli: (011) (021) etc. -

Polul Prisme se găsește pe circumferența cercului de proiectiune; pentru a determina proiectiunea sa, vom măsura unghiul ortopinacoidului cu prisma, vom lua Suplimentul și plecând de la x spre y , luăm arcul xp și în p se va găsi polul prisme (110).

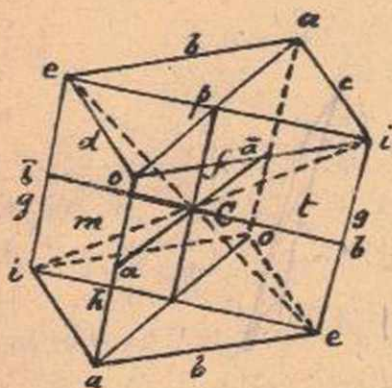
Piramidele fiind în formă cu prismele, poli lor se vor găsi pe diametrele la extremitățile cărora sunt poli prismelor respective. Poziția lor e determinată ca și pentru dome. Așa sunt poli (111) etc. -

VII.

Sistemul Asimetric.

Dupa Levy, forma primitivă a acestui sistem este. Pirama Bioblectă care este un paralelipiped oare care, inclinat în același timp d'indărăpt înainte și de la dreapta la stânga. Elementele sale sunt: 2 baze care sunt în

paralelograme notate p ; două fețe laterale m și alte două t . Solidul e dispus așa ca, cele două fețe anterioare sunt:



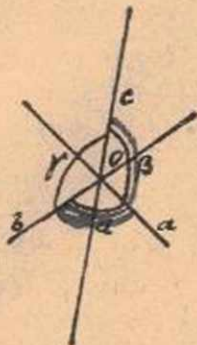
la dreapta t , la stânga m . Muchile sunt două câte două opuse egale: muchile bazei sunt notate: b, c, d, f și muchile laterale g și h , dispuse așa ca muchile g care sunt ascuțite să fie la

dreapta și stânga, pe când muchile obtuze h sunt înaintea și îndărăpt. - Unghiurile solide sunt de asemenea două câte două opuse și egale și sunt notate: a, e, i și o . - și sunt dispuse la partea superioară așa ca: a este îndărăpt, e la stânga, i la dreapta și o înaintea. - -

Sistemul nu are de cât un centru de simetrie, în raport cu care toate elementele sunt simetrice două câte două. - -

După Naumann Sistemul acesta se numește Triclinic și este caracterizat prin trei axe, care sunt neegale și formează între ele unghiuri veritabile. Una din aceste

axe este verticală și se numește Axa principală, pe când celelalte două sunt nec-



gale: una mai lungă numită Macrodiagonală, și alta mai scurtă numită Brachidiagonală. - Parametrii corespunzători sunt: a pentru brachidiagonală, b pentru macrodiagonală și c pentru Axa principală.

Unghiurile axelor sunt:

a unghiul macro cu brachidiagonală, β al axei principale cu brachidiagonală și γ al axei principale cu macrodiagonală. -

Fiind că elementele de simetrie se reduc la unul singur: centrul de simetrie, toate formulele acestui sistem vor fi reprezentate prin a patra parte pentru formele piramidale și care se numesc: Tetartoforme; și prin jumătate pentru formele prismatice, care se numesc Hemiforme. - -

După Naumann prisma lui Seoy este compusă din două Hemiprisme: O hemiprismă dreaptă, corespunzând raportului parametric $a:b:c$ și notată: $\infty P'$ sau (110) după Miller

o Hemiprisma stângă, corespunzând raportului parametric: $a : b : \infty c$, notată ∞P_{san} (110) după Miller. —

Formele secundare ale sistemului asimetric vor fi deduse din prisma bioblica, după cum s'a văzut la sistemul Clinorombic și pentru a nu ne repeta vom da numai tabloul acestor forme cu numele și notațiunile în cele trei sisteme. —

Basipinacoid $p, \infty a : \infty b : c. OP. (001).$

Brachipinacoid $q^{\frac{1}{2}} \infty a : b : \infty c \infty P_{\infty} (010).$

Macropinacoid $h^{\frac{1}{2}} a : \infty b : \infty c \infty P_{\infty} (100).$

Hemiprisma dreaptă $t a : b : \infty c \infty P' (110)$

" stângă $m \bar{a} : b : \infty c \infty P (110).$

Hemibrachiprisma dr. $g^{\frac{2}{3}}$ $ma : b : \infty c \infty P_{in} (1m0)$

" " st. $g^{\frac{2}{3}}$ $m\bar{a} : b : \infty c \infty P_{in} (1m0).$

Hemibrachidoma sup.dr. $i^{\frac{2}{3}}$ $\infty a : b : mc mP_{\infty}^{\infty} (0m1).$

Hemimacrodoma ant. $o^{\frac{2}{3}}$ $a : \infty b : mc mP_{\infty}^{\infty} (m01).$

Tetartopiramida sup.dr. $f^{\frac{2}{3}}$ $a : b : mc mP' (mm1).$

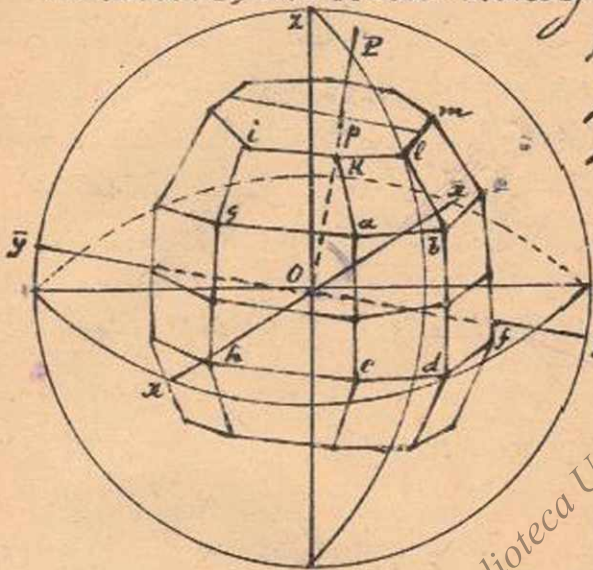
" inf.st. $d^{\frac{2}{3}}$ $\bar{a} : b : mc mP' (m\bar{m}1)$

" brachi " sup.dr. $f^{\frac{2}{3}} g^{\frac{1}{3}} h^{\frac{1}{3}}$ $na : b : mc mP_{in} (nma).$

" " " inf.st. $c^{\frac{2}{3}} f^{\frac{1}{3}} g^{\frac{1}{3}} h^{\frac{1}{3}}$ $n\bar{a} : b : mc mP_{in}^{\infty} (n\bar{m}m).$

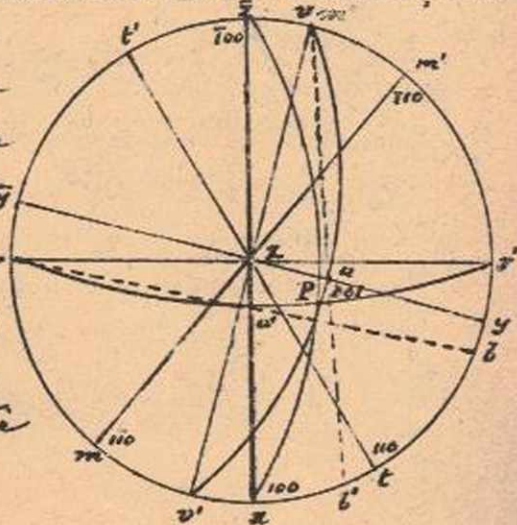
" macro " sup.dr. $f^{\frac{2}{3}} d^{\frac{1}{3}} h^{\frac{1}{3}}$ $a : \infty b : mc mP_{in}^{\infty} (ma).$

Pentru proiectiunea fot orfelor sistemul Triclinic, vom considera ca si la sistemul Monoclinic, un solid imaginar compus din principalele sale fețe. Sistemul fiind asimetric, putem face proiectiunea pe ori ce plan. Se ia planul ce trece prin polul macro, brachipinacoidului si a prizmelor perpendicular pe axa principala. Atunci axa principala se proiecteaza in centru; cercul care trece prin



axa principala si polul macro-pinacoidului se proiecteaza dupa un diametru la extremitatile caruia sunt polul macro-pinacoidului (100) / (100). Pentru a determina pozitiunea polului brachipinacoidului, masuram unghiul macro cu brachipinacoidul, luam suplimentul si, plecand de la (100) luam pe cercul de proiectie

Diagram illustrating the projection of crystal faces onto a sphere. The sphere is divided into sectors by great circles. The faces are labeled with Miller indices: 100, 110, 111, 112, 113, 114, 115, 116, 117, 118, 119, 120, 121, 122, 123, 124, 125, 126, 127, 128, 129, 130, 131, 132, 133, 134, 135, 136, 137, 138, 139, 140, 141, 142, 143, 144, 145, 146, 147, 148, 149, 150, 151, 152, 153, 154, 155, 156, 157, 158, 159, 160, 161, 162, 163, 164, 165, 166, 167, 168, 169, 170, 171, 172, 173, 174, 175, 176, 177, 178, 179, 180, 181, 182, 183, 184, 185, 186, 187, 188, 189, 190, 191, 192, 193, 194, 195, 196, 197, 198, 199, 200. The diagram shows the projection of the crystal faces onto the sphere, with the center marked as O and the axes labeled x, y, and z.



un arc egal cu acest supliment, la extremitatea lui va fi proiecția polului (010): -

Polii prișmilor se vor găsi pe circumferența cercului de proiecție. Măsurând unghiul ce face fața de Hemiprișmă dreaptă anterioară cu Macropinacoidul, luăm suplimentul și luăm de la (100) spre dreapta arcul până în t unde se găsește polul (110). -

Piind că bazipinacoidul e în jonă cu macro și brachipinacoidul, polul sau se va găsi la intersecția cercurilor care dau inclinația bazi pe macro și brachipinacoid. Măsurăm inclinația bazi pe brachipinacoid, luăm suplimentul pe care - l măsurăm de la (010) în jos, obținem punctul b' pe care - l unim cu v și obținem intersecția a ; prin v , a și v' trecem un cerc mare, pe care se va găsi polul căutat. Măsurăm apoi diedrul bazi cu macropinacoidul, luăm suplimentul și procedând ca mai înainte, determinăm punctul b pe care - l unim cu r și obținem pe a' ; cercuri va și $v'a'$ întâlnesc pe cel alt în P unde e proiecția polului bazipinacoidului (001). - -

Polul macrodomcă se va găsi pe cercul de jonă cu macro și bazipinacoidul. - -



Curs
de
Cristalografie

≡ PARTEA II^a

CRISTALOGRAFIA FIZICĂ

predat la Facultatea de Științe din Iași
de

PROFESOR V. C. BUȚUREANU

Anul 1919 - 1920.

CRISTALOGRAFIA FIZICĂ

Partea I^a

Fenomene Optice

Fenomenile optice joacă un mare rol în Mineralogie și mai ales în Petrografie: putem spune că această parte a Mineralogiei datează de la introducerea studiului și a întrebuințării proprietăților optice a mineralelor. — Vom căuta dar a expune în cele ce urmează, mai întâi rezumatul cunoștințelor teoretice asupra fenomenelor luminoase și apoi vom arata cât mai în detaliu, partea practică a acestui subiect, insistând asupra întrebuințării aparatelor pentru studiu acestor fenomene, cu aplicare la minerale și mai ales la determinarea mineralelor ce constituie rocile. —

Capitol I

Fenomene Generate

Se știe că în optică, pentru a se studia fenomenele luminoase, se admite existența unui corp ponderabil, foarte subtil, foarte puțin dens și foarte elastic, numit Eter luminos; el se găsește între moleculele corpurilor materiale și peste tot locul unde nu este materie, în vid, în spațiile interplanetare etc. -

Pentru a explica producerea fenomenelor optice, se admite astăzi teoria undulațiilor. - După această teorie, când un corp este luminos, moleculele sale se găsesc în o stare de mișcare undulatoare, analogă cu cea a unui corp în vibrațiune sonoră, și care nu este altceva decât o mișcare pendulară; apoi, că această mișcare se transmite corpurilor înconjurătoare, prin intermediarul eterului sub formă de unde, care ajung în contact cu organul nostru vizual, ne face să simțim impresiunea acestei mișcări și ne dau astfel impresia luminoasă.

Această mișcare vibratoare se produce și se pro-

pagă după niște legi, pe care trebuie să le precizăm bine de la început. —

Se admite că lumina se propagă în linie dreaptă și că mișcarea vibratoare nu se face în direcția propagării luminei, cum se face la vibrațiunile sonore, dar într-un plan perpendicular pe direcția de propagare, și în azimuturi, care pot să varieze sau care sunt determinate.



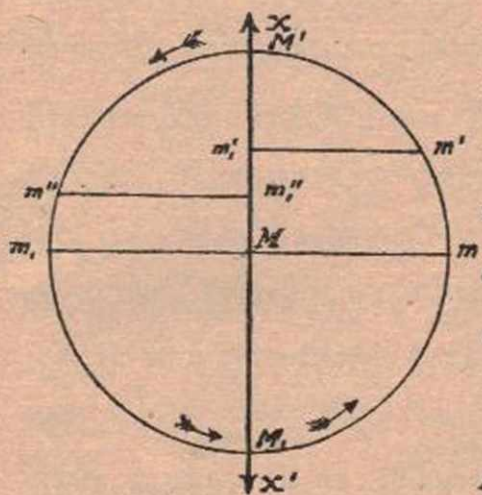
Să considerăm o moleculă M în repaus, sub influența mai multor forțe în echilibru, care sunt forțele de atracțiune a moleculelor înconjurătoare; să admitem că dăm acestei molecule o impulsione în direcțiunea Mx , și că sub influența acestei impulsioni, ea ajunge în M' , pentru îndepărtarea cea

mai mare. — În acest moment forțele care lucrează asupra moleculei, tind a se pune din nou în echilibru și a aduce molecula din pozițiunea M' în M ; se întâmplă același lucru ca și când molecula

ar cădea din M' în M . Însă în timpul acestei mișcări, molecula a câștigat o viteză egală și de sens contrar impulsiei primitive, în virtutea căreia ea trece de poziția sa de echilibru M și ajunge în M_1 , poziție simetrică lui M' în raport cu M . Însă, când molecula a ajuns în M_1 , forțele care lucrează asupra ei, din nou caută să revină în echilibru și să aducă molecula în poziția de repaus în punctul M . Mișcarea aceasta se va continua la infinit, cât timp molecula nu va pierde forța vie pe care a căpătat-o prin prima impulsie ce i-am dat. — Aceasta este mișcarea vibratoare.

Când molecula ajunge din nou în M , ea a descris o mișcare completă sau o vibrațiune întreagă. Direcțiunea Mx a mișcării, poartă numele de trajectorie, distanța maximum MM' se numește: amplitudine, iar timpul ce pune molecula pentru a face o mișcare întreagă, se numește Perioadă.

Putem explica mișcarea vibratoare a unei molecule și în alt mod: considerăm



du-o ca proiecțiunea pe
trajectorie, a mișcării u-
nui punct m , mobil pe
circonferența unui cerc,
descrișă din punctul M
ca centru, cu o rază ega-
lă cu amplitudinea. - Când
punctul este în repaos în m ,
proiecțiunea sa pe trajectorie este în M , dacă
el parcurge circonferența de jos în sus și de
la dreapta la stânga, deci spre M' , este evident
că, pentru pozițiunea m' , proiecțiunea va fi
 m' , și când punctul a descris un sfert de circon-
ferență, pozițiunea sa M' se confundă cu pro-
iecția sa pe trajectorie. -

Până acum sensul mișcării a fost po-
zitiv; dacă mișcarea continuă, mobilul
percurge circonferența de sus în jos, deci în
senz negativ: așa, când mobilul este în m'' ,
proiecțiunea sa este în m'' : Se zice că acum
viteza este de senz contrar.

Cand mobilul este în m , deci a descris o jumătate de circumferență, proiecția sa este în M , pozițiunea inițială de repaos. - Ajuns în M , mobilul se confundă cu proiecția sa, și de aci înainte senzul mișcării devine din nou pozitiv; în m mobilul ajunge la punctul de plecare, după ce a parcurs circumferența întreagă, iar proiecția sa din nou vine în M . - Deci, cât timp mobilul a parcurs circumferința întreagă, molecula M a împlinit o vibrațiune completă. -

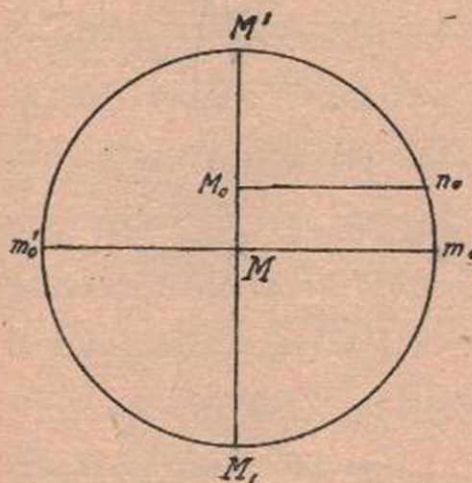
Este evident că molecula M s'a mișcat de la M , la M' în senz pozitiv, și de la M' la M , în senz negativ, având, în cazul întâi o viteză pozitivă, și în al doilea o viteză negativă. -

În această nouă explicație a mișcării vibratoare: Amplitudinea mișcării este raza circumferenței; perioada este timpul întrebuințat pentru a parcurge circumferența întreagă, iar distanța parcursă în timpul unei perioade se

numește: lungime de undulațiune.

Însă, pentru a determina complet mișcarea vibratoare, trebuie să definim încă Faza mișcării, adică, pozițiunea mobilului pe circonferență, sau a proiecției sale pe traiectorie, într'un moment dat. - Dacă însemnăm cu T perioada, este evident că, pentru un timp $\frac{T}{4}$, mobilul va parcurge un sfert de circonferență, adică:
 $\frac{2\pi}{4} = \frac{\pi}{2}$, și molecula face un sfert de undulațiune: însemnând cu λ lungimea de undulațiune, molecula va fi făcut $\frac{\lambda}{4}$. Pentru prescurtare se numește λ , lungime de undă. -

Pentru a face să se înțeleagă mai bine noțiunea de fază, să considerăm pe circonferență, două puncte mobile: m_0 și n_0 , păstrând între ele distanța constantă: $m_0 n_0$ și având aceeași viteză de mișcare. - Mai putem spune că asupra moleculi M lucrează două forțe, care-i dau două mișcări de aceeași direcție, având aceeași perioadă și aceeași amplitudine, dar lucrând una după alta, așa în cât, când prima forță a adus



molecula în M_o , a doua
începe atunci acțiunea sa.

Este evident că sub
influența acestor două
forțe, molecula M va avea
o mișcare vibratoare rezul-
tantă. - Se numește fază
a acestei mișcări, distanța
constantă m_o a celor

două mobile, sau M_o a celor două pozițiuni ini-
țiale a mișcării moleculei, sub influența celor două
forțe. - Este evident că dacă cele două mobile
se confundă, faza este nulă, și prin urmare cele
două mișcări se adaugă. - Dacă faza este o ju-
mătate de circumferență, Π , cele două mobile
sunt în m_o și m' : dacă pornesc în același moment,
primul va avea o mișcare pozitivă, al doilea o
mișcare negativă, și fiind că au aceeași viteză, când
 m_o ajunge în M' , m' ajunge în M ; proiecțiunile
acestor două mișcări pe traiectorie fiind MM'
și MM , și fiind că ele sunt egale și de sens con-

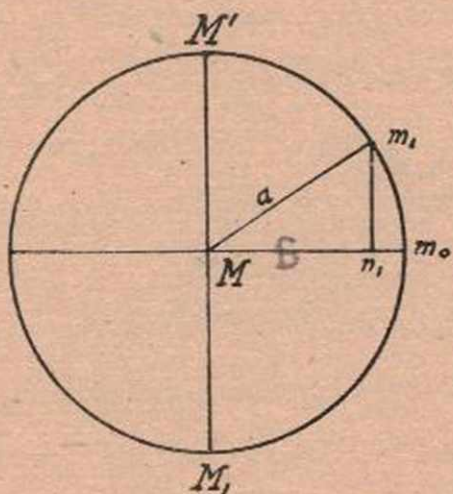
trar, este evident că, vibrația rezultantă va fi nulă. — Deci: pentru o fază egală cu zero, mișcarea vibratoare va fi maximum, iar pentru o fază egală cu o semicirconferență, mișcarea va fi nulă. —

Pentru pozițiuni intermediare între faza egală cu zero și egală cu π , mișcarea va fi proporțională cu această fază. —

Mișcarea mobilului m pe circonferență este o mișcare oscilatoare curbilinie sau o mișcare pendulară de mică amplitudine, pe când mișcarea proiecțiunii sale pe diametrul $M'M$, este o mișcare oscilatorie rectilinie; aceste două mișcări sunt identice și trebuie să fie reprezentate prin aceeași ecuațiuni. — Dacă însemnăm cu a raza cercului care este traiectoria mișcării rectilinii, viteza de mișcare a mobilului, pe circonferență, după formulele pendulului va fi :

$$V = a \sqrt{\frac{g}{l}}$$

Dacă luăm ca origină a timpurilor, momentul în care mobilul pleacă din punctul m_0 , pe când proiecțiunea pleacă din acelaș punct



pe diametrul corespondent, și fiind că origina spațiilor pentru distanțele percurse pe diametru este centrul M , este evident că, după timpul t în momentul când mobilul ajunge în m_1 pe circumferență, proiecția sa este în n_1 ; dacă vom pune:

$n_1, M=S$, în triunghiul $M m_1 n_1$, vom avea:

$$S = M m_1 \cos n_1, \quad M m_1 = a \cos n_1, \quad M m_1,$$

și fiind că unghiul la centru $n_1, M m_1$ este măsurat prin raportul arcului cuprins la rază, vom putea scrie:

$$S = a \cos \frac{m_0 m_1}{a}$$

și fiind că $m_0 m_1$ este spațiul parcurs în timpul t cu viteza V , vom avea:

$$S = a \cos \frac{Vt}{a}$$

Însă, din egalitatea: $V = a \sqrt{\frac{g}{l}}$ scoatem:

$$\frac{V}{a} = \sqrt{\frac{g}{l}} \text{ sau multiplicând cu } t \text{ vom avea:}$$

$$\frac{Vt}{a} = t \sqrt{\frac{g}{l}}$$

Înlocuind în valoarea lui S avem:

$$S = a \cdot \cos t \sqrt{\frac{g}{l}} \dots \dots \dots (1)$$

Aceasta este formula spațiilor, analoagă cu cea a mișcării pendulare. —

Pentru a avea valoarea vitezei, este de ajuns de a lua derivata în raport cu timpul, a ecuației spațiilor și vom avea:

$$V = \frac{ds}{dt} = -a \sqrt{\frac{g}{l}} \sin t \sqrt{\frac{g}{l}}$$

și dacă punem: $a \sqrt{\frac{g}{l}} = b$, vom avea:

$$V = -b \sin t \sqrt{\frac{g}{l}} \dots \dots \dots (2)$$

formula identică cu cea ce ne dă viteza mișcării pendulare. —

Și fiind că timpul T a unei oscilațiuni întregi este egal cu timpul ce pune mobilul pentru a parcurge circumferența, vom avea:

$$T = \frac{S}{V} = \frac{\pi a}{V} = \frac{\pi a}{a \sqrt{\frac{g}{l}}} = \pi \sqrt{\frac{l}{g}} \dots \dots \dots (3)$$

formula analoagă cu cea a mișcării pendulare. —

Mișcarea pe diametrul $m_0 m_0'$, care este o mișcare oscilatoare rectilinie, este tipul mișcării vibratoare: ea este definită prin cele trei formule ce am stabilit. Însă această mișcare trebuie să fie produsă prin acțiunea unei forțe: putem să ne închipuim că centrul M este sediul unei puteri, care atrage mobilul m_0 , și fiind că această atracțiune este proporțională cu masa mobilului și invers proporțională cu distanța, este evident că, atracțiunea pe unitatea de masă și la unitatea de distanță va fi: $\frac{g}{l}$, care este caracteristică pentru fiecare forță. — Dacă punem:

$$\frac{g}{l} = \beta$$

cele trei ecuații precedente devin:

$$S = a \cos t \sqrt{\beta}$$

$$V = -b \sin t \sqrt{\beta}.$$

$$\text{și } T = \frac{\pi}{\sqrt{\beta}}.$$

și atunci valoarea lui $b = a \sqrt{\frac{g}{l}}$ devine:

$$b = a \sqrt{\beta}.$$

De ordinar se da acestor formule o altă formă, eliminând pe β . În adevăr: să punem

$$\tau = 2T = \frac{2\pi}{V\beta} \text{ de unde: } V\beta = \frac{2\pi}{\tau}$$

Să înlocuim această valoare în egalitățile precedente: vom avea:

$$S = a \cos 2\pi \frac{t}{\tau} \dots\dots\dots (\alpha)$$

$$V = -b \sin 2\pi \frac{t}{\tau} \dots\dots\dots (\beta)$$

Formula (β) ne va servi mai ales în studiul fenomenilor optice. În această formulă: b reprezintă viteza maximum sau amplitudinea, iar τ este durata unei oscilațiuni complete. —

Formula ne dă viteza V în momentul t . —

— Să considerăm o moleculă animată de o mișcare vibratoare reprezentată prin ecuația:

$$v = b \sin 2\pi \frac{t}{\tau} \dots$$

Această mișcare va ajunge la o distanță d cu o viteză V' , după un timp t' . Molecula, care a primit această mișcare, va începe a executa mișcarea pe care prima moleculă o execută pornind de la $t = 0$; viteza sa va fi dată prin formulă:

$$v' = b \sin 2\pi \left(\frac{t}{\tau} - \frac{t'}{\tau} \right)$$

t' fiind dat prin: $t' = \frac{d}{V}$, — care este faza mișcării. — Vom putea deci scrie :

$$v' = b \sin \frac{2\pi}{\tau} (t - t').$$

Fiind că t' este o constantă, pe care o vom însemna cu: φ . vom putea zice că: mișcarea vibratoare în general poate fi reprezentată prin formula:

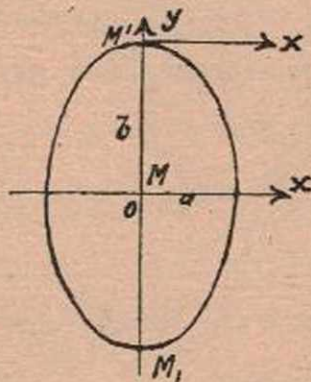
$$v = a \sin \frac{2\pi}{\tau} (t - \varphi). -$$

în care: a este amplitudinea, τ durată unei oscilațiuni, φ o constantă care depinde de fază, iar t este timpul, când se consideră această mișcare. —

Capitol II

Compunerea mișcărilor vibratoare

În cele precedente s'a considerat că, traiectoria mișcării vibratoare este rectilinie, fiind că mișcarea



era rezultatul acțiunii a două forțe paralele. — Dar dacă considerăm că asupra moleculei vibrante lucrează două forțe perpendiculare, este evident că mișcarea rezultantă nu va mai fi rectilinie, și că drumul descris de moleculă va fi curbiliniu. —

Aşa: molecula M fiind adusă în M' , în loc de a fi lasată să revină în M , ca în cazul precedent, să-i dăm o impulsune în direcţiunea $M'x$; atunci ea va descrie un drum curbiliniu, Să căutăm care va fi ecuaţia mişcării şi prin urmare forma drumului străbătut de către moleculă. —

Avem dar molecula sub influenţa a două forţe: una în direcţiunea Ox şi alta în direcţiunea Oy . — Ecuaţiile mişcărilor după fiecare din aceste direcţii sunt:

$$x = a \sin \frac{2\pi}{T} (t - \varphi) \text{ şi}$$

$$y = b \sin \frac{2\pi}{T} (t - \varphi'). -$$

φ şi φ' fiind constantele caracteristice pentru pentru cele două mişcări. —

Pentru a găsi ecuaţia mişcării rezultante, trebuie să considerăm aceste două ecuaţii împreună şi să facem să dispară t ; — pentru aceasta dezvoltăm cele două sinusuri şi avem:

$$x = a \sin 2\pi \frac{t}{T} \cos 2\pi \frac{\varphi}{T} - a \cos 2\pi \frac{t}{T} \sin 2\pi \frac{\varphi}{T}.$$

$$\text{şi } y = b \sin 2\pi \frac{t}{T} \cos 2\pi \frac{\varphi'}{T} - b \cos 2\pi \frac{t}{T} \sin 2\pi \frac{\varphi'}{T}.$$

Să înmulţim prima ecuaţie cu: $b \sin 2\pi \frac{\varphi}{T}$ şi să

scădem pe a doua din întâia; Vom avea:

$$bx \sin 2\pi \frac{\varphi'}{T} - ay \sin 2\pi \frac{\varphi}{T} = ab \sin 2\pi \frac{t}{T} \sin 2\pi \frac{\varphi' - \varphi}{T} \dots (1)$$

Să înmulțim pe cea întâi cu: $b \cos 2\pi \frac{\varphi'}{T}$ și pe a doua cu: $a \cos 2\pi \frac{\varphi}{T}$ și să scădem pe a doua din întâia; vom avea:

$$bx \cos 2\pi \frac{\varphi'}{T} - ay \cos 2\pi \frac{\varphi}{T} = ab \cos 2\pi \frac{t}{T} \sin 2\pi \frac{\varphi' - \varphi}{T} \dots (2)$$

Să ridicăm la pătrat ecuațiile (1) și (2) și să adăugăm membru cu membru; avem:

$$b^2 x^2 + a^2 y^2 - 2abxy \cos 2\pi \frac{\varphi' - \varphi}{T} = a^2 b^2 \sin^2 2\pi \frac{\varphi' - \varphi}{T} \dots (3)$$

Aceasta este ecuația unei elipse, a căreia formă de poziție depinde de: a , b și $(\varphi' - \varphi)$. -

Fie K un număr păreche oarecare, și dacă:

$$\varphi' - \varphi = (2K + 1) \frac{T}{4}$$

atunci: $\cos 2\pi \frac{\varphi' - \varphi}{T} = 0$ și $\sin^2 2\pi \frac{\varphi' - \varphi}{T} = 1$

Ecuația mișcării devine:

$$b^2 x^2 + a^2 y^2 = a^2 b^2 \dots$$

ceia ce înseamnă că molecula se mișcă pe o elipsă raportată la axele sale a și b . - Dacă admitem că amplitudinele a și b sunt egale, adică axele elipsei sunt egale, formula mișcării devine: $x^2 + y^2 = b^2 \dots$

care este ecuația unui cerc; deci molecula vibrăntă

descrie circumferența unui cerc. —

$$\text{Dacă: } \varphi' - \varphi = 2K \frac{\tau}{4}$$

atunci putem avea două cazuri:

1) Sau K este nepăreche și deci:

$$\sin^2 \frac{2\pi}{\tau} (\varphi' - \varphi) = 0 \text{ și } \cos \frac{2\pi}{\tau} (\varphi' - \varphi) = -1.$$

și formula mișcării devine:

$$b^2 x^2 + a^2 y^2 + 2abxy = 0.$$

$$\text{sau: } bx + ay = 0.$$

care reprezintă ecuația unei drepte. —

2) Sau K este păreche și atunci:

$$\sin^2 \frac{2\pi}{\tau} (\varphi' - \varphi) = 0 \text{ și } \cos \frac{2\pi}{\tau} (\varphi' - \varphi) = 1.$$

și formula devine:

$$b^2 x^2 + a^2 y^2 - 2abxy = 0.$$

$$\text{sau } bx - ay = 0.$$

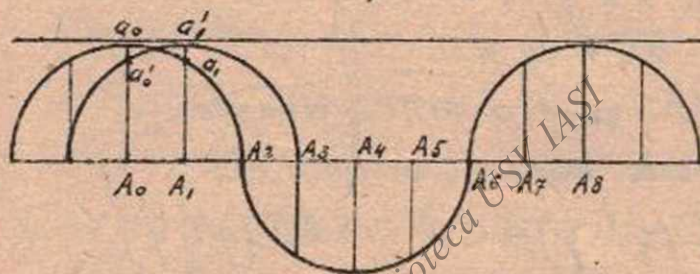
care este ecuația unei alte drepte. —

Deci: în aceste două cazuri traiectoria mișcării este rectilinie și e reprezentată prin cele două diagonale ale dreptunghiului construit pe cele două axe: a și b. —

Capitol III

Reprezentarea grafică a mișcării vibratoare. —

Mișcarea vibratoare poate fi reprezentată prin o linie curbă continuă, care este o linie sinusoidală. — Pentru a înțelege mai bine această reprezentare, să ne închipuim, un șir de 8 molecule :



$A_0, A_1, \dots$
în linie dreaptă aparținând
unui mediu
oare care. —

Să dăm primei molecule A_0 , o impulsie, care să o ducă în a_0 pozițiune extremă. — Fiind că aceste molecule sunt în echilibru sub influența forței de atracțiunei care se exercită între ele, este evident că, molecula A_0 va lua cu sine și pe celelalte molecule în mișcarea ce ea execută; însă fiind că trebuie un oare care timp pentru ca această mișcare să ajungă în A_1 , este evident că, în momentul când A_0 ajunge la maximul de departare, molecula A_1 va fi ajuns numai în a_1 , și când

ea va ajunge în pozițiunea extremă a' , molecula A_0 se va fi întors în a_0 , așa că între moleculele $A_0, A_1, \dots$ va fi totdeauna o diferență de fază. — Dacă presupunem că aceste molecule sunt în întârziere una vis-a-vis de alta de $\frac{1}{8}$ undulațiune, este evident că: atunci când A_0 va fi în a_0 molecula A_2 este în întârziere de $\frac{2}{8}T = \frac{T}{4}$ și va pleca atunci din pozițiunea de echilibru, pe când A_4 va pleca numai după $\frac{4T}{8} = \frac{T}{2}$ și A_8 după $\frac{8T}{8} = T$. Deci: între A_0 și A_8 este o diferență de fază egală cu o perioadă completă, și deci ele vor vibra sincronie. — Însă noi am zis că: distanța care separă două puncte care vibrează sincronie se numește lungime de undă. — În aceste condițiuni, putem să spunem că: două molecule separate prin o distanță egală cu un număr păreche de jumătăți de undă, vor fi în coincidență de fază, și vor vibra sincronie, pe când cele ce sunt separate prin o distanță egală cu un număr nepăreche de jumătăți de undă vor fi în discordanță de fază. —

Dacă V este viteza cu care mișcarea s'a propagat în timpul T și a parcurs lungimea de undă,

vom putea scrie:

$$V = \frac{\lambda}{\tau} \text{ de unde: } \lambda = V\tau.$$

După un timp t' , mișcarea unei molecule care se găsește la o distanță x de la A_0 , va fi reprezentată prin:

$$v = a \sin \frac{2\pi}{\tau} (t - \varphi - t').$$

și fiindcă: $t' = \frac{x}{V}$ vom avea:

$$v = a \sin \frac{2\pi}{\tau} \left(t - \varphi - \frac{x}{V} \right) = a \sin \frac{2\pi}{\tau} \left(\frac{t - \varphi}{\tau} - \frac{x}{V\tau} \right).$$

și înlocuind valoarea găsită pentru $V\tau$:

$$v = a \sin 2\pi \left(\frac{t - \varphi}{\tau} - \frac{x}{\lambda} \right).$$

Ipoteza în care ne-am pus pînă acum, ne a făcut să admitem că molecula vibrantă era supusă unei forțe care o mișcă în o anumită direcție. -

Însă dacă admitem că mișcarea acestei molecule consistă în dilatări și contractări succesive, sau după cum se zice, dacă admitem o moleculă plasantă este evident că mișcarea acestei molecule se va transmite moleculelor înconjurătoare în toate direcțiunile și atunci, în loc de a considera într'un moment dat, o moleculă pe direcția de propagare a

mișcării, suntem obligați a considera o serie de molecule în jurul moleculei vibrante care vor constitui o suprafață reprezentând locul geometric al tuturor moleculelor care la un moment dat au aceeași fază de vibrațiune. — Această suprafață se numește: suprafață de undă. —

Este evident că forma acestor suprafețe de undă, va depinde de natura mediului în care se propagă mișcarea. Așa: pentru un mediu isotrop, fiind că viteza de propagare a mișcării, trebuie să fie aceeași în toate direcțiunile, suprafața de undă va fi suprafața unei sfere. — Pentru cazul în care mediul nu este isotrop, suprafața de undă este în general: un elipsoid de formă variabilă. —

Dintre fenomenele optice care ne interesează mai mult în Mineralogie, cele mai importante fenomenele de interferență, care provine din suprapunerea a mai multor mișcări vibratoare. — Vom considera cazul când, două sau mai multe mișcări vibratoare, paralele și de aceeași perioadă se suprapun. —

$$\begin{aligned} \text{Fie: } v_1 &= a_1 \sin \frac{2\pi}{T} (t - \varphi_1) \\ v_2 &= a_2 \sin \frac{2\pi}{T} (t - \varphi_2) \end{aligned}$$

vibrațiunile considerate. Ele vor avea ca rezultată o vibrațiune unică:

$$\begin{aligned} V &= v_1 + v_2 + \dots = a_1 \sin \frac{2\pi}{T} (t - \varphi_1) + a_2 \sin \frac{2\pi}{T} (t - \varphi_2) + \dots \\ \text{sau: } V &= \sin \frac{2\pi}{T} t (a_1 \cos 2\pi \frac{\varphi_1}{T} + a_2 \cos 2\pi \frac{\varphi_2}{T} + \dots) - \\ &\quad - \cos \frac{2\pi}{T} t (a_1 \sin 2\pi \frac{\varphi_1}{T} + a_2 \sin 2\pi \frac{\varphi_2}{T} + \dots) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{Să punem: } a_1 \cos 2\pi \frac{\varphi_1}{T} + a_2 \cos 2\pi \frac{\varphi_2}{T} + \dots &= A \cos 2\pi \frac{\Phi}{T} \\ \text{și } a_1 \sin 2\pi \frac{\varphi_1}{T} + a_2 \sin 2\pi \frac{\varphi_2}{T} + \dots &= A \sin 2\pi \frac{\Phi}{T} \end{aligned}$$

Dacă ridicăm la putere aceste două egalități și apoi le adunăm, vom avea:

$$\begin{aligned} A^2 &= (a_1 \cos 2\pi \frac{\varphi_1}{T} + a_2 \cos 2\pi \frac{\varphi_2}{T} + \dots)^2 + \\ &\quad + (a_1 \sin 2\pi \frac{\varphi_1}{T} + a_2 \sin 2\pi \frac{\varphi_2}{T} + \dots)^2 \dots (1) \end{aligned}$$

Dacă dividem cele două egalități a doua prin cea întâi,

$$\text{vom avea: } \tan 2\pi \frac{\Phi}{T} = \frac{a_1 \sin 2\pi \frac{\varphi_1}{T} + a_2 \sin 2\pi \frac{\varphi_2}{T} + \dots}{a_1 \cos 2\pi \frac{\varphi_1}{T} + a_2 \cos 2\pi \frac{\varphi_2}{T} + \dots} \dots (2)$$

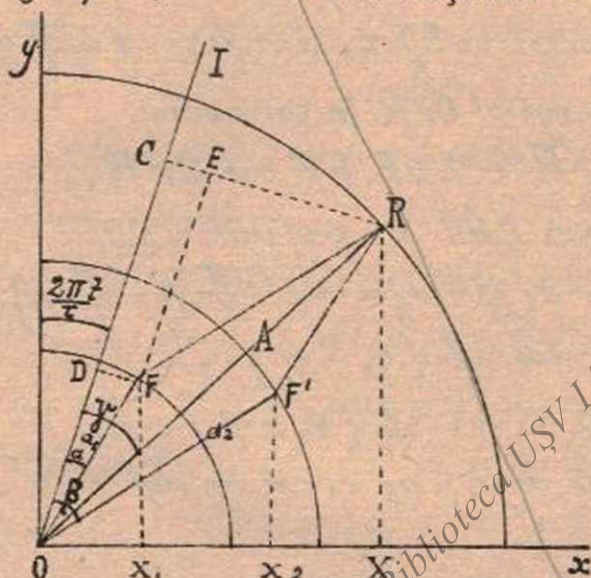
Putem scrie atunci pentru vibrația rezultată:

$$\begin{aligned} V &= A \left(\sin 2\pi \frac{t}{T} \cos 2\pi \frac{\Phi}{T} - \cos 2\pi \frac{t}{T} \sin 2\pi \frac{\Phi}{T} \right) \\ \text{sau: } V &= A \sin \frac{2\pi}{T} (t - \Phi) \dots (3) \end{aligned}$$

Deci: vibrațiunea rezultată va fi o vibrațiune simplă a căreia amplitudine A este dată de formula (1) iar faza Φ

de formula (2). -

Să reprezentăm acest rezultat prin o construcție grafică, considerând mișcarea vibratoare ca aceea a



proiecției unui punct care se mișcă pe circumferența unui cerc a cărui rază este egală cu amplitudinea și a cărei viteză unghiulară constantă este:

$\frac{2\pi}{T}$. Fie două mișcări vibratoare, produse de

două puteri în direcțiunile OF și OF' , care se proiectează pe axa Ox , după OX_1 și OX_2 . Compunând pe $OF = a_1$, cu $OF' = a_2$ obținem vibrațiunea rezultantă după $OR = A$, care se proiectează după OX . Unghiul cuprins între vibrațiunile OF și OF' rămâne constant și egal cu: $\frac{2\pi}{T}(\varphi_1 - \varphi_2)$. - Așa dar, pe când mobilele F și F' se mișcă pe circumferențele cercurilor cu razele a_1 și a_2 , rezultanta lor e reprezentată prin mișcarea mobilului R pe circumferența cercului de rază A . - Dacă considerăm o direc-

fiune OI care să facă cu OY un unghi $\frac{2\pi t}{T}$, atunci unghiurile ce fac această direcție cu OF , OF' și OR , reprezintă fazele mișcărilor compozante și a mișcării rezultante și anume: $\alpha = \frac{2\pi}{T} \varphi_1$, $\beta = \frac{2\pi}{T} \varphi_2$, $\gamma = \frac{2\pi}{T} \Phi$.

Să considerăm triunghiul OFR în care avem:

$$OR^2 = OF^2 + FR^2 - 2 OF \cdot FR \cos OFR.$$

Insa: $\cos OFR = -\cos FOF' = -\cos(DOF' - DOF)$

sau $\cos OFR = \cos(\beta - \alpha) = \cos\left(\frac{2\pi}{T} \varphi_2 - \frac{2\pi}{T} \varphi_1\right)$

sau $\cos OFR = \cos \frac{2\pi}{T} (\varphi_2 - \varphi_1)$.

sau: $A^2 = a_1^2 + a_2^2 + 2 a_1 a_2 \cos \frac{2\pi}{T} (\varphi_2 - \varphi_1)$.

Valoarea lui A depinde, de a_1 și a_2 dar și de diferența de fază $(\varphi_2 - \varphi_1)$.

Dacă a_1 și a_2 au valori anumite, pentru $\varphi_2 = \varphi_1$ adică $\varphi_2 - \varphi_1 = 0$, valoarea lui A devine:

$$A^2 = a_1^2 + a_2^2 + 2 a_1 a_2 = (a_1 + a_2)^2$$

sau $A = a_1 + a_2$.

Aceiași valoare o are și pentru $\varphi_2 - \varphi_1 = 2K \frac{T}{2}$

căci: $\cos \frac{2\pi}{T} \cdot 2K \frac{T}{2} = \cos 2K\pi = 1$.

În aceste cazuri valoarea lui a este maximum.

Când $\varphi_2 - \varphi_1 = (2K+1) \frac{T}{2}$ atunci:

$$\cos \frac{2\pi}{T} (\varphi_2 - \varphi_1) = \cos (2K+1)\pi = -1.$$

Atunci valoarea lui A devine :

$$A^2 = a_1^2 + a_2^2 - 2 a_1 a_2 = (a_1 - a_2)^2 \text{ sau :}$$

$$A = a_1 - a_2$$

care reprezintă o valoare minimum, si dacă $a_1 = a_2$
atunci : $A = 0$. -

În acest caz mișcarea vibratoare este complet distrusă . -

Pentru a găsi faza mișcării rezultante constatăm din figura precedentă că, dacă din R scoborăm o perpendiculară RC pe direcția OI și din F o perpendiculară FD pe OI și alta FE pe RC , atunci avem :

$$CR = \sin \bar{\gamma} \text{ și } OC = \cos \bar{\gamma}$$

$$\text{Deci : } \bar{\gamma} = \frac{CR}{OC} = \frac{CE + ER}{OD + DC} = \bar{\gamma} \frac{2\pi}{T} \Phi .$$

$$\text{Înscă : } CE = DF = OF \sin \alpha = a_1 \sin \frac{2\pi}{T} \varphi_1$$

$$\text{De asemenea : } ER = a_2 \sin EFR = a_2 \sin DOF' = a_2 \sin \beta$$

$$\text{sau } ER = a_2 \sin \frac{2\pi}{T} \varphi_2$$

$$\text{apoi : } OD = OF \cos \alpha = a_1 \cos \frac{2\pi}{T} \varphi_1 \text{ și}$$

$$DC = EF = FR \cos \beta = a_2 \cos \frac{2\pi}{T} \varphi_2 \quad \text{Deci :}$$

$$\bar{\gamma} \frac{2\pi}{T} \Phi = \frac{a_1 \sin \frac{2\pi}{T} \varphi_1 + a_2 \sin \frac{2\pi}{T} \varphi_2}{a_1 \cos \frac{2\pi}{T} \varphi_1 + a_2 \cos \frac{2\pi}{T} \varphi_2} . -$$

Urmează dar că : mișcarea vibratoare rezultantă

este o nouă mișcare vibratoare dată prin ecuația:

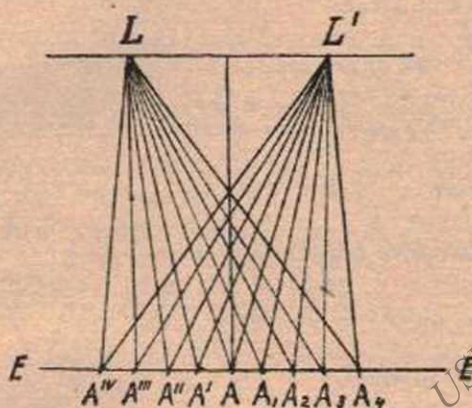
$$V = A \sin \frac{2\pi}{T} (t - \phi). -$$

— În rezumat dară: suprapunerea a doua raze luminoase de aceeași natură, adică de lumină monocromatică, va avea ca rezultat: sau întărirea luminei până la un maximum sau scăderea ei până la anularea completă a luminei. — Dacă întrebuițăm însă două raze de lumină albă, care să conțină aceleași radiațiuni și cu aceeași intensități respective, atunci dacă, pentru o radiațiune determinantă există o diferență de fază de $\frac{T}{2}$, va exista o interferență negativă și deci acea radiațiune se va distruge. — Bine înțeles că celelalte radiațiuni vor interfera pozitiv, și deci rezultanta lor nu va fi nulă. —

Lumina care va rezulta nu va fi albă fiind că va lipsi radiațiunea distrusă, și va fi colorată cu culoarea complementară. —

Fenomenele de interferență se pot realiza cu ajutorul a diferite aparate, care dau naștere frunzelor lui Fresnel, care consistă în o serie de

bande luminoase și obscure, care alternează și se repetă în mod simetric la dreapta și la stânga unei bande centrale luminoase. — Formațiunea se



explică, dacă facem, să intervină fenomenele de interferență.

Dacă din punctele L și L' pleacă vibrațiuni luminoase de aceeași perioadă și aceeași amplitudine, pe carele

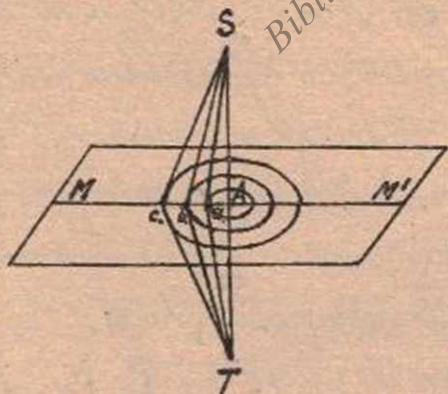
primim pe un ecran E E', atunci, dacă punctul A de pe ecran este așa, încet: $LA = L'A$, mișcarile venite din L și L' se vor ajuta căci întârzierea între aceste mișcări este nulă; deci în punctul A va fi interferența pozitivă, deci o bandă luminoasă. — Dacă considerăm un al doilea punct A₁, așa ca să avem:

$LA_1 - L'A_1 = \frac{\lambda}{2}$, este ușor de văzut că, în punctul A₁, va fi interferență negativă, deci se va forma o bandă obscură și așa mai departe, vor urma la dreapta și stânga lui A, bande alternativ obscure

și luminoase. — Este evident că, departarea franjelor una de alta variază cu lungimea de undă. —

Capitol

Principiul lui Huygens. — Pentru a explica mai bine fenomenele de dublă refracție și de polarizare, să vedem în ce consistă principiul lui Huygens relativ la propagarea undelor luminoase. — Mai întâi să arătăm în ce consistă principiul celui mai scurt drum. —



Să considerăm punctul S în mișcare vibratoare în fața unui mediu diferit de acel în care el se găsește, și de care e separat prin suprafața MM' . Fie T un punct în mediul al doilea, care primește

mișcarea vibratoare de la S . Înainte de a ajunge în T , mișcarea trimisă de S trebuie să străbată suprafața MM' ; și fiindcă fiecare punct din suprafața MM'

primește mișcarea din S , ne putem închipui că aceste puncte intrate ele însuși în mișcarea vibratoare, pot trimite la rândul lor mișcarea vibratoare în toate direcțiunile, și prin urmare și punctului T . Dacă admitem că: $S A T$ este drumul cel mai scurt între S și T , punctul A precum și punctele încunjurătoare pot fi considerate ca origina mișcării ce primește T . Din punctul A ca centru, cu raze infinit de mici să descriem cercuri concentrice: Aa , Ab , Ac

Este evident că, mișcările trimise de a , b , c , .. vor pune mai mult timp, pentru a ajunge în T , decât mișcarea ce vine din A . Deci: în T vor ajunge mișcări vibratoare ce vor avea diferențe de fază, și dacă distanțele Aa , Ab , bc sunt destul de mici, putem admite că aceste diferențe de fază au ca valoare $\frac{\lambda}{2}$. —

Atunci, împrejurul punctului A , ne vom putea închipui o serie de forme concentrice, compuse din serii de puncte, care trimet în T mișcări cu viteze: v_1 , v_2 , v_3 și fiind că aceste viteze sunt alternativ pozitive și negative, putem

serie, însemnând cu V viteza mișcării ce primește T :

$$V = v_1 - v_2 + v_3 - v_4 - \dots$$

Este evident că termenii membrului al doilea scad în valoare, și fiind că sunt alternativi pozitivi și negativi, pentru ca V să aibă o valoare finită, vom putea neglija termenii de la un loc oarecare, fără a micșura intensitatea mișcării ce primește T . Deci efectul produs de punctele de pe suprafața MM' se reduce la ocel produs de punctul A și zonele încunjurătoare, sau altfel zis: dacă interpunem între suprafața MM' și T un ecran având o deschidere care să lase liberă acțiunea lui A și a zonelor încunjurătoare, punctul T va fi luminat ca și când toată suprafața MM' ar fi liberă; sau putem zice încă: dacă intercălăm un ecran care să împedecă acțiunea lui A și a zonelor încunjurătoare, punctul T nu va mai fi luminat, ceea ce înseamnă că celelalte zone mai îndepărtate, nu-i trimet lumina. — Și fiind că zonele descresc în jurul lui A sunt descrise cu raze de ordinea lui $\frac{\lambda}{2}$, suprafața activă în jurul lui A , se poate reduce la acest punct

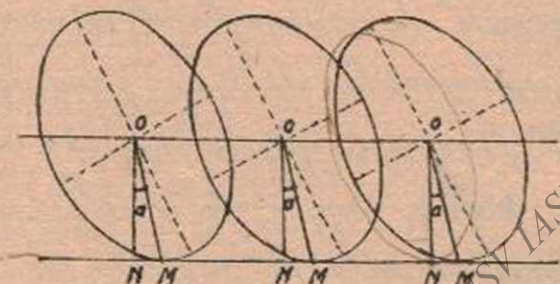
ceia ce înseamnă că, punctul T este luminat de o singură rază SAT , care reprezintă drumul cel mai scurt între S și T . —

Am văzut că, în realitate mișcarea vibratoare se propagă sub formă de unde curbe, a căror suprafață poartă numele de Suprafață de undă. — Însă considerarea suprafețelor de undă complică explicarea diverselor fenomene optice, așa că e nevoie să le înlocuim cu unde plane, care ar fi undele curbe considerate la o mare distanță de centrul lor de mișcare. — În acest caz putem confunda unda cu planul tangent în punctul unde această suprafață de undă e considerată ca atinsă de direcțiunea de propagare a mișcării; — avem astfel unda plană corespunzătoare suprafeței de undă. —

Dacă considerăm propagarea mișcării vibratoare într'un mediu isotrop, într'un moment dat unda plană va fi planul tangent la toate undile sferice considerate, — așa că raza luminoasă va fi dreaptă perpendiculară pe unda plană. — În mediile Anisotrope viteza de pro-

pagare a mișcării variind cu direcțiunea, suprafața de undă nu va fi sferică, dar în general a unui elipsoid. — Dacă considerăm o serie de unde elipstice, undă plană se va propaga paralel cu sine însuși

pe când raza luminoasă va face un unghi cu normala la undă plană. —



Atunci viteza mișcării este reprezentată prin lungimea OM a dreptei

care unește centrul suprafeței de undă cu punctul de contact al acestei suprafețe cu planul tangent. —

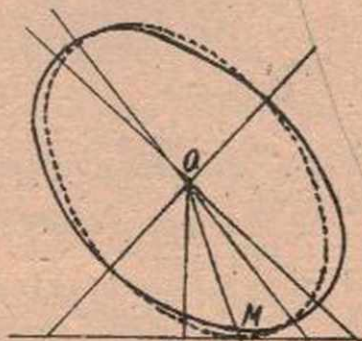
Viteza de mișcare a unei plane va fi reprezentată prin distanța cea mai mică ce separă două unde consecutive, adică prin dreapta ON, căreia se dă numele de viteză normală, a carei valoare este:

$$ON = OM \cos \alpha . -$$

Unghiul α variază: când direcția razei coincide cu o axă a suprafeței, unghiului α este zero. —

Va trebui dar a considera într'un mediu anisotrop, două direcții de propagare și anume: cea a razei

luminoase și acea normală la unda plană corespondentă. — Vom avea deci: suprafața de undă corespondentă punctelor M atinse de raze după



unitatea de timp, și suprafața vitezelor normale, locul punctelor M unde ajung undele plane plecate din un centru comun, după unitatea de timp. —

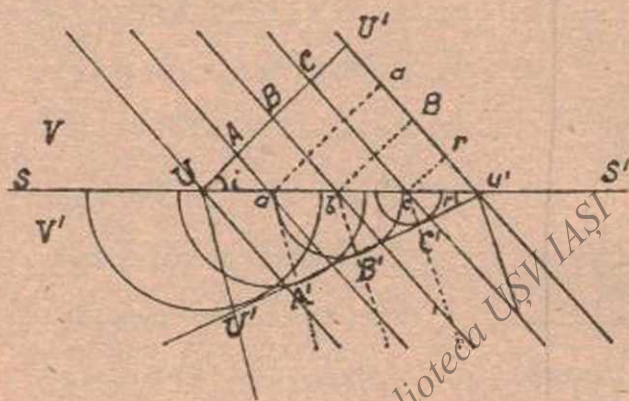
Să aplicăm acum principiul lui Huygens la explicarea fenomenelor de refracțiune. — Fie SS' suprafața de separație între două medii isotrope, a căror densități diferite sunt: V și V' ; să considerăm în primul mediu (aer) o undă incidentă UU' , atingând suprafața de separare a celor două medii în punctul U . — După ce s'au văzut mai înainte, punctul U va transmite mișcarea ce a primit cu o viteză V' în mediul al doilea, și la finele unității de timp, mișcarea va ajunge pe o sferă de rază V' care este o fracțiune din V :

$$V' = \frac{1}{\lambda} V.$$

în un punct u ... În acelaș timp, punctele A, B, C ... vor fi pereurs mai întâi distanțele: Aa, Bb, Cc , —

în primul mediu, cu viteza V , și apoi, distanțele: aA', bB', cC' ... în al doilea mediu cu viteza V' ;

pe când mișcarea plecată din punctul V' se propagă numai în primul



mediu, și ajunge abia în u' la suprafața de separație. — Pentru a găsi poziția punctelor atinse de mișcare în mediul al doilea, trebuie să considerăm mișcările lui $A, B, C, \dots, U'$ ajunse în $a, b, c, \dots, a'$ pe undele plane: aa, bb, cc . —

Atunci din punctele a, b, c , descriem sfere cu razele: av', bv', cv' . — Aceste sfere reprezintă în mediul al doilea, locul geometric al punctelor atinse de mișcările plecate din a, b, c pe când în primul

mediu, mișcarea a parcurs distanțele : $\alpha u'$, $\beta u'$, $\gamma u'$,
 Razele sferelor sunt : $Uu = V' = \frac{1}{x} V$, $\alpha A' = \frac{1}{x} \alpha U' =$
 $\frac{1}{x} Cc$, $\beta B' = \frac{1}{x} \beta U' = \frac{1}{x} Bb$, $\gamma C' = \frac{1}{x} \gamma U' = \frac{1}{x} Aa$. —

Este evident că, dacă punctele u, A, B, C, U' sunt
 pe aceeași dreaptă, punctele ; $u, A', B', C' u' \dots$ vor
 fi de asemenea pe o dreaptă, căci avem :

$$\frac{Aa}{Ua} = \frac{Bb}{Ub} = \frac{Cc}{Uc} = \frac{U'u'}{Uu'} \text{ sau}$$

$$\frac{cC'}{\frac{1}{x}cU'} = \frac{bB}{\frac{1}{x}bU'} = \frac{aA'}{\frac{1}{x}aU'} = \frac{Uu}{\frac{1}{x}Uu'} ;$$

ceia ce înseamnă că : o undă plană incidentă, dă
naștere la o undă plană refractată. —

În triunghiurile UVu' și Uuu' avem :

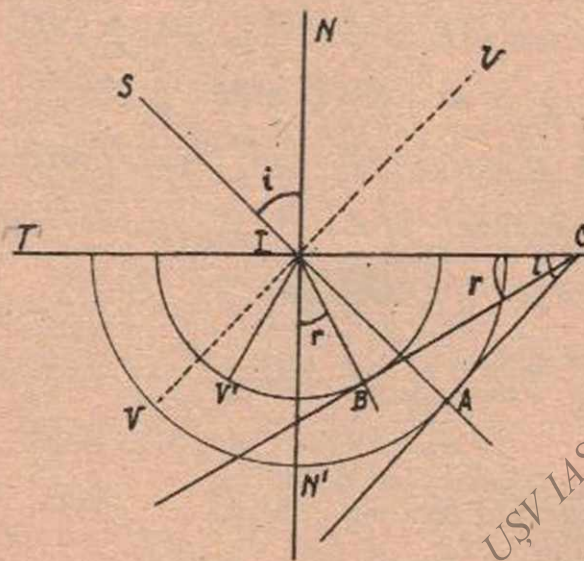
$$\frac{U'u'}{\sin i} = \frac{Uu}{\sin r} \text{ sau } \frac{U'u'}{Uu} = \frac{\sin i}{\sin r}$$

și fiind că $U'u'$ și Uu sunt vitezele de propa-
 gare în cele două medii considerate vom avea
 în definitiv :

$$\frac{V}{V'} = \frac{\sin i}{\sin r} = K. —$$

Această construcție a fost simplificată și
 dată sub forma următoare :

Fie IU undă plană corespunzătoare razei



incidentă SI . Din punctul I cu o rază proporțională cu V , se construiește o sferă, care reprezintă su-

profata de undă corespunzătoare primului mediu. — Raza incidentă presungită, atinge sfera în punctul A ; planul tangent în A reprezintă poziția unei plane după unitatea de timp propagată ca în (timpul) primul mediu, care întâlnește planul de separație a celor două medii TT' , după o dreaptă normală la planul figurei, care se proiectează în C . — Dacă din punctul I cu o rază V' descriem o altă sferă, aceea-
stă va reprezenta suprafața undei în mediul al
doilea; pentru a obține undă plană refractată cores-
punzătoare, se duce planul tangent la această a doua sferă,
trecând prin dreapta proiectată în C , și se obține astfel

punctul de tangență B. - Dreaptă IB va reprezenta direcțiunea razei refractate, care este în planul de incidență. -

Cele două triunghiuri ICA și ICB dreptunghice în A și B, având latura IC comună, ne dau :

$$IA = IC \sin \angle ICA \dots\dots\dots (1)$$

$$\text{și } IB = IC \sin \angle ICB$$

și fiind că IA și IB sunt razele sferelor care reprezintă suprafețele de undă în cele două medii, ele reprezintă vitezele V și V'; și fiind că dreptele CA și CB sunt normale pe IA și IB, este evident că vom avea :

$$\angle ICA = i \quad \text{și} \quad \angle ICB = r$$

Atunci egalitățile (1) devin :

$$V = IC \sin i$$

$$V' = IC \sin r. \quad \text{și prin urmare:}$$

$$\frac{V}{V'} = \frac{\sin i}{\sin r}.$$

Și fiind că V și V' sunt constante, raportul lor va fi o constantă. - Deci :

$$\frac{\sin i}{\sin r} = \frac{V}{V'} = n. -$$

Constanta n se numește : Indice de refracțiune. -

Această constantă fiind foarte interesantă, s'a căutat a

i se da expresiuni diferite. —

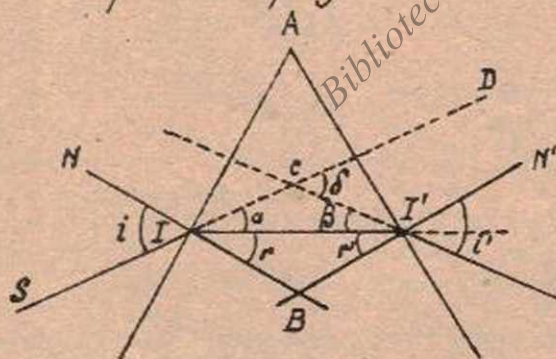
Dacă V reprezintă viteza în aer, vom putea scrie :

$$\frac{V'}{V} = \frac{1}{n} = v, \quad v \text{ fiind viteza de propagare în al doilea mediu, în raport cu viteza în aer, luată ca unitate. Deci:}$$

$$n = \frac{1}{\frac{V'}{V}} = \frac{1}{v}$$

ceia ce se exprimă zicând că: indicele de refracțiune este inversul vitezei de propagare în mediul considerat. —

Pentru a determina valoarea acestui indice, ne servim de formulele prizmei. —



Raza SI după refracțiune ia direcția I'S'.

Dacă n este indicele de refracțiune vom scrie :

$$\frac{\sin i}{\sin r} = n = \frac{\sin i'}{\sin r'}$$

Însă în patrulaterul

$AIBI'$ avem : $B = 180^\circ - A$. Tar în triunghiul IBI' avem:

$B = 180^\circ - (r + r')$. Deci : $A = r + r'$. —

De asemenea δ este dată prin : $\delta = \alpha + \beta = (i - r) +$

$$(i' - r') = (i + i') - (r + r') .$$

înlocuind $r + r'$ prin valoarea sa, vom avea :

$$d = (i + i') - A .$$

Într-o experiență probată cu pentru anumite valori
ale lui A și n , deviația d trece prin un minimum . —
Cu o anumită condițiune acestui minimum —

Din formula precedentă deducem că acest mi-
nimum are loc pentru :

$$d i + d i' = 0$$

În adevăr : formula : $\frac{\sin i}{\sin i'} = n = \frac{\sin r}{\sin r'}$ ne da :

$$\cos i \, dr = n \cos r \, dr . \text{ și }$$

$$\cos i \, di' = n \cos r' \, dr'$$

$$\text{Deci : } dr + dr' = 0$$

$$\text{Atunci avem : } di = - di' \text{ și }$$

$$dr = - dr'$$

$$\text{Prin urmare : } \frac{\cos i}{\cos i'} = \frac{\cos r}{\cos r'}$$

Această relațiune nu este posibilă de căd dacă :

$$i = i' \text{ și } r = r'$$

Dacă însăm derivăm : $\frac{d^2 d}{d i^2}$ constatăm că ea

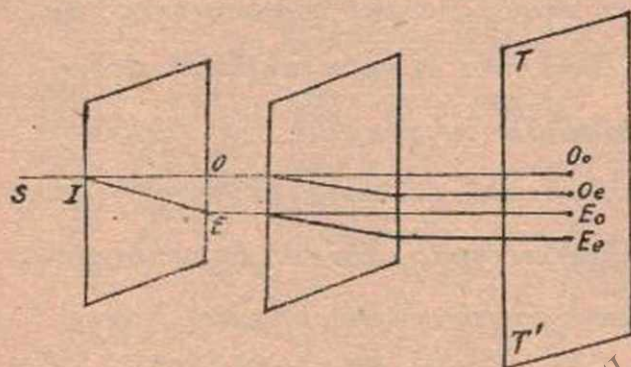
schimbă de semn . —

un fascicol paralel de lumină pe un spat, vedem ieșind din cristal două fascicule, care dau pe un ecran două imagini a deschiderii prin care intră fasciculul de lumină. — Acest fenomen, care a fost descoperit la 1847 de către Bartholin și studiat mai târziu de către Huygens, se numește: dublă refracțiune

Dacă în această experiență, facem să se învârtască cristalul de spat în jurul direcțiunii razei incidente, constatăm că, una din imagini rămâne nemiscată, pe când cea-laltă se întoarce în jurul celei întâi. — Cea întâi fasciculă urmează legile refracțiunii simple și se numește rază ordinară, pe când cea-laltă urmează după alte legi și se numește: rază extraordinară. —

Huygens, care a studiat acest fenomen, a constatat că, pe lângă dedublarea razei incidente, lumina care străbate spatul, capătă proprietăți noi. — În adevăr: dacă primim cele două raze ordinară și extra ordinară esite din un prim spat, pe un al doilea, fiecare din ele se dedublează și se obțin în definitiv patru imagini, care în cazul

cel mai general nu mai au aceeași intensitate lumi-



noasă. — Dacă întur-

năm al doilea spaț,

se constată că pentru

anumite pozițiuni, cele

patru imagini se reduc

la două și chiar la una

singură. — Deci: lu-

mina iese din primul spaț nu este analoagă cu lumina

naturală; ea a fost numită lumina polarizată. —

Aceste fenomene studiate de către Fresnel, l-au con-

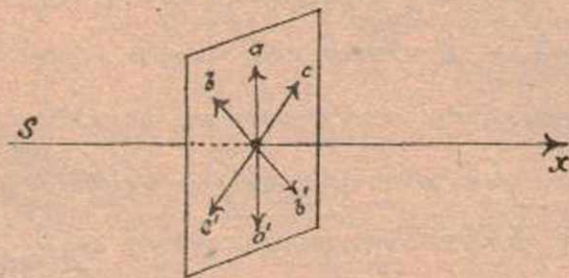
duc să admită mai multe ipoteze, pentru explicarea

lor. —

I. — După Fresnel, lumina naturală este rezul-

tatul vibrației eterului, care se face într'un plan per-

pendicular pe direcția de propagare, urmând traiectorii



care pot fi: linii drepte,

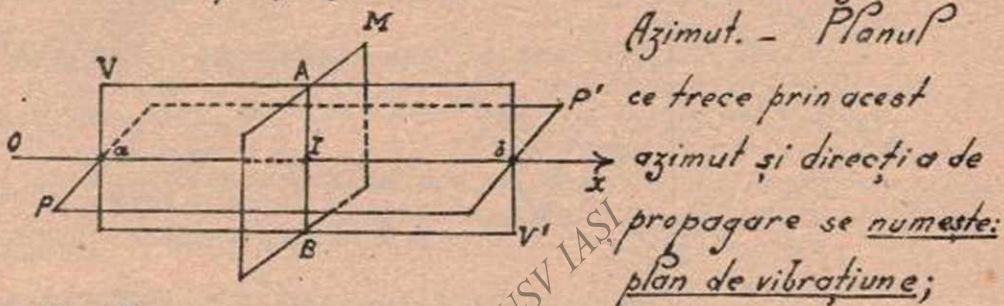
circonferețe sau elipse

dispuse în azimuturi

care schimbă în fie

care moment. —

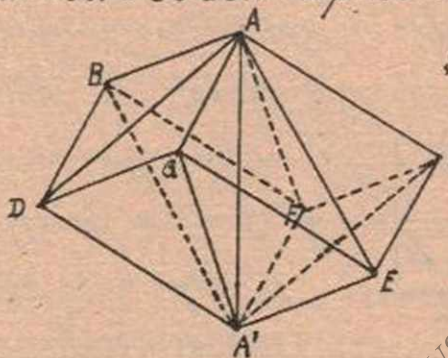
Lumina naturală care a trecut prin un spaț este polarizată. — Pentru a defini ce este lumina polarizată. — Fresnel admite că: în lumina ce a trecut prin un spaț, vibrațiunile au loc tot într'un plan perpendicular pe direcția de propagare dar numai într'un singur



planul ce trece prin direcția de propagare și este perpendicular pe planul de vibrațiune se numește: plan de polarizație. — Așa: Ox fiind direcția de propagare, iar AB azimutul fix după care are loc vibrațiunea, în planul M perpendicular pe Ox, planul de vibrațiune va fi planul VV', pe când planul PP' perpendicular pe VV' va fi planul de polarizație. —

Când traiectoriile vibrațiunilor sunt linii drepte, polarizația se zice: rectilinie; pe când pentru traiectorii circulare sau eliptice, avem polarizația circulară sau eliptică. —

Pentru a obține lumina polarizată se pot întrebuința mai multe metode: dar cele mai de multe ori se întrebuințează romboedi de spat de Islanda, și relativ la ei vom căuta să dăm explicarea fenomenilor dublei refracțiuni: —



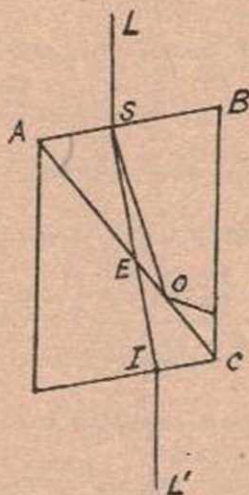
Se știe că, într'un romboedru avem trei planuri, care trec prin axa principală și muchiile culminante: aceste planuri se numesc secțiuni principale. — Dacă în ex-

periențele citate vom considera secțiunile principale a celor doi romboedri de spat, se constată că: dacă secțiunile principale sunt paralele avem două imagini, și când fac un unghiul oare care avem cele patru imagini. — Pentru explicarea fenomenului, conform definițiunei date luminei polarizate, trebuie să admitem că secțiunea principală este: sau planul de vibrațiune sau de polarizație a unei raze. Când cristalii de spat au secțiunile principale paralele, atunci primul spat nu lasă să treacă decât vibrațiunile paralele cu secțiunea principală, așa că planurile de polarizație a

razelor ordinare și extraordinare, coincidând cu acele a spatului al doilea, vibrațiunile ieșite din primul spat, vor trece prin al doilea fără alterațiune și prin urmare vom obține două imagini. — Când secțiunile principale formează între ele un unghi, atunci vibrațiunile ieșite din primul spat vor încerca o descompunere în al doilea spat, și vom obține patru imagini. —

— În diversele aparate se servesc la producerea și studiarea fenomenilor în lumina polarizată, nu avem nevoie de a avea patru imagini, ci numai una singură. — Așa avem microscopul polarizator în care ne servim de niște romboedri de spat, preparați în condiții speciale, care au fost imaginate de către constructorul Nicol, de unde numele de Nicolicele două acestor aparate. —

Pentru a le obține se taie un cristal de spat așa ca urma AC a acestei secțiuni să facă cu AB , latura secțiunii principale un unghi BAC de cel puțin 80° : în practică $BAC = 90^\circ$. — Se lipesc cele două jumătăți cu balsam de Canada, și atunci raza incidentă LS se descompune în raza SE



extraordinară și SO ordina-
ră, care ajunge pe suprafața
AC a balsamului de Canada.
Însă indicii de refracțiune
cu spatului sunt :

Pentru raza ordinară... 1.6585

" " extraordinară. 1.4864

pe când indicele balsamu-
lui de Canada este 1.548.

Deci: raza ordinară având indicele superior bal-
samului, va suferi reflexiunea totală, deci va fi dată
la o parte, pe când raza extraordinară, va trece prin
spat: această rază va fi polarizată paralel cu
secțiunea principală a spatului.

Este evident că, dacă întrebuițăm doi nicoli,
raza extraordinară iese din primul nicol, căzind
pe al doilea, se descompune încă în două raze,
din care cea ordinară va suferi reflexiunea totală,
pe când vibrațiunea razei extraordinară va trece
complet. —

Cei doi nicoli astfel întrebuiți se numesc:

cel întâi polarizor, al doilea Analizor. Când planurile secțiunilor principale ale polarizorului și a analizorului sunt paralele, este evident că raza incidentă căzută pe polarizor va trece și prin analizor, fiindcă raza extraordinară ce iese din polarizor este polarizată în planul secțiunii principale a acestui nicol și deci și în planul secțiunii principale și a analizorului. — Dar dacă secțiunile principale ale nicolilor sunt perpendiculare, raza iese din polarizor fiind polarizată în secțiunea principală a acestui, are vibrațiunile sale perpendiculare pe secțiunea principală a analizorului, deci ea nu va putea merge mai departe. — În fine dacă cei doi nicoli au secțiunile lor principale făcând un unghi oarecare numai o parte a vibrațiunii va trece. — 2^a A doua ipoteză admisă de Fresnel este relativ la propagarea undelor plane în medii cristalizate. —

Pentru explicarea teoriei undulațiunilor, am admis că, dacă o moleculă de eter este deplasată din pozițiunea sa de echilibru, se naște o

forță contrară, care tinde a aduce această moleculă în pozițiunea sa de echilibru: aceasta este o forță elastică. — Să propunem că moleculă s'a deplasat de o forțe mică cantitate d ; atunci putem admite că forța elastică corespondentă F , este proporțională cu această deplasare, și atunci putem pune:

$$\frac{F}{d} = E$$

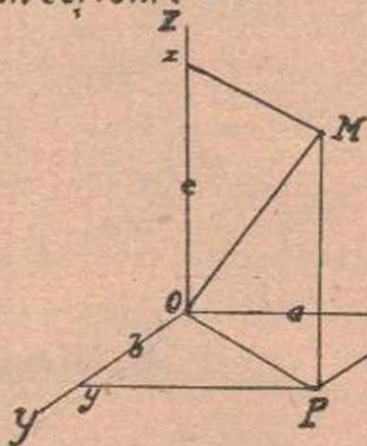
E fiind un coeficient constant care se cheamă: Coeficient de elasticitate. Fresnel admite că în vibrațiunile luminoase putem scrie ca și în cele sonore:

$$v = \sqrt{\frac{E}{\rho}}$$

ceia ce se poate exprima zicând că: viteza de propagare a mișcării este proporțională cu rădăcina patrată din coeficientul de elasticitate și invers proporțională cu rădăcina patrată din masa specifică ρ a eterului. — Atunci: dacă considerăm un mediu isotrop, trebuie să admitem că, pentru rezon de simetrie direcțiunea forței elastice este aceeași ca cea a deplasării, pe când într'un mediu Anisotrop, nu mai este același lucru. — Dar se poate

demonstra că, sunt cel puțin trei direcțiuni perpendiculare între ele, după care forța elastică are aceeași direcțiune ca deplasarea. —

Se numesc Axe de elasticitate aceste trei direcțiuni. —



Să considerăm aceste trei axe de elasticitate Ox, Oy, Oz trecând prin un punct O și să le luăm ca axe de coordonate. —

Dacă presupunem că în O este o moleculă de

eter, atunci după cele ce am admis mai înainte, dacă deplasăm această moleculă după axa Ox , se naște o forță elastică X , dirijată după Ox , însă în sens contrar $x0$; pentru o deplasare x putem să zicem că forța elastică este proporțională cu această deplasare, și cu patratul coeficientului de elasticitate a și să scriem: $X = -a^2 x$.

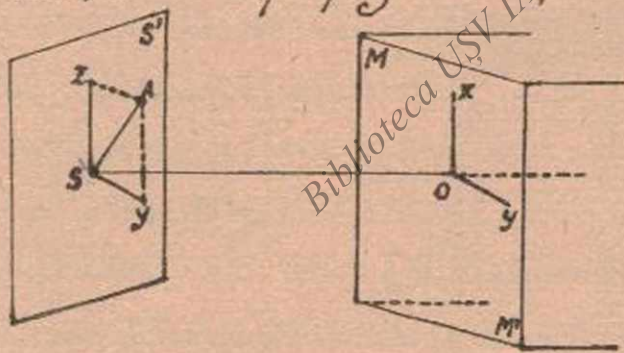
De asemenea, după cele alte axe de elasticitate vom avea:

$$Y = -b^2 y.$$

$$Z = -c^2 z.$$

Însă dacă molecula O încearcă o deplasare oarecare OM , atunci putem descompune această deplasare, în trei altele, după cele trei axe, având fiecare o forță elastică corespondentă. — Și fiindcă aceste deplasări sunt foarte mici, elasticitățile se superpun și putem admite că: rezultanta celor trei forțe elastice, după cele trei axe, este forța elastică ce lucrează asupra lui M . —

— Să facem acum aplicare la fenomenul dublei refracțiuni, adică la propagarea mișcării vibratoare în un

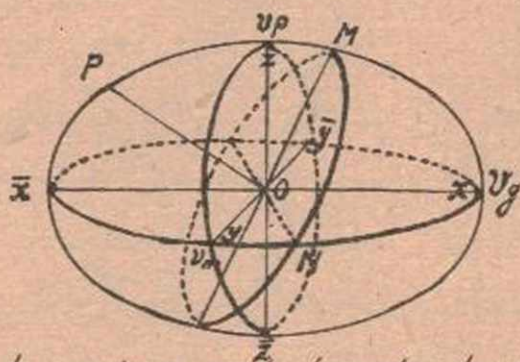


cristal oarecare;
să admitem că MM'
este suprafața acestui cristal conținând direcțiile Oz și Oy , a celor două axe de

elasticitate, și fie SO direcția unei raze normale feței cristalului, adică a cărei suprafață de undă SS' este paralelă cu suprafața cristalului. — Putem admite că, în unda SS' vibrațiunea are loc după Sz și prin urmare unda poate să se propage fără alterație cu o viteză proporțională cu coeficientul de elasticitate

$\S^2$. — Însă dacă presupunem că mișcarea vibratoare
 are loc după Sy , unda se propagă încă fără altera-
 țiune însă cu viteză proporțională cu $\sqrt{2}$. — Și, da-
 că mișcarea vibratoare are loc după direcțiunea SA ,
 intermediară între Sz și Sy , atunci forța elastică
 ne fiind dirijată în sensul deplasării, tinde a schimba
 direcția acestei deplasări, și prin urmare unda nu se
 poate propaga fără alterare. — În acest caz, în vir-
 tutea principiului mișcărilor mici și a superpunerii
 elasticităților în mișcarile mici, putem admite că,
 unda corespondentă deplasării SA , este rezultatul
 superpunerii a două unde a caror vibrațiune sunt diri-
 jate în direcțiuni veri-cari, însă a căror rezultanță
 este SA . — Pentru cazul care ne interesează, unda
 poate fi considerată ca rezultatul superpunerii a
 unei unde a cărei mișcare vibratoare are loc în direc-
 ția Sz și ca mărime proiecția lui SA pe Sz , și o
 altă undă a cărei mișcare vibratoare are loc după
 Sy , și ca mărime proiecția lui SA pe Sy ; aceasta
 se poate exprima zicând că: Unda incidentă a cărei
vibrațiune are loc după SA , ajungând pe suprafața

elipsoidului; dacă prin O ducem un plan perpendicular pe direcțiunea OP , vom obține o secțiune eliptică, a



cărei axe sunt: OM și ON .

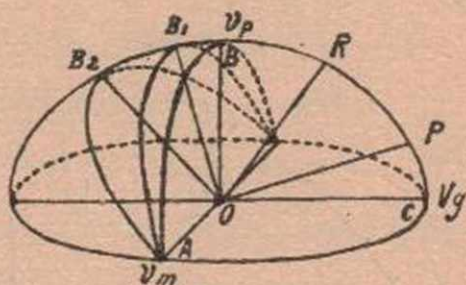
Atunci putem zice că:

dacă raza OP cade pe crist., numai două vibrațiuni vor pute să-l străbată și anume acele a căror

trajectorii sunt dirijate după OM și ON , cu viteze egale cu aceste axe. — Dacă dar considerăm o infinitate de raze de direcțiuni diferite, și construim punctele determinate prin vitezele mișcărilor lor în cele două direcțiuni admise, este evident că, locul geometric al acestor puncte va reprezenta suprafața de undă corespunzătoare. — Și fiind că, axele de elasticitate optică sunt diferite, este evident că, după aceste axe vor fi viteze de mișcare diferite, reprezentate în formula elipsoidului prin parametrii a , b , c , care sunt vitezele principale. —

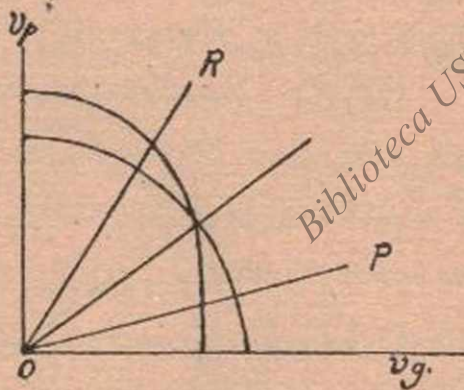
Pentru a construi suprafața de undă să considerăm elipsoidul și direcțiunile OP , OR cărora corespund pe elipsoid secțiunile OB , OB_2 Pentru a avea supra-

fața de undă corespunzătoare, vom lua pe OP , OR ... distanțe proporționale cu



axele elipselor corespunzătoare, OA și OB_1 , OA și OB_2 care reprezintă vitezele de propagare a celor două raze

după OC , OP , OR Locul punctelor astfelu obținute



va fi suprafața de undă, a careia intersecție cu planul $v_g v_p$ este reprezentată prin figura alăturată. —

— Dacă considerăm acum undele vibratoare, pentru a avea axele de elasticitate,

va trebui să luăm inversele vitezelor principale :

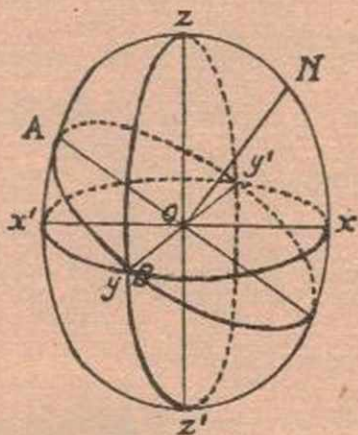
$$\frac{1}{a}, \frac{1}{b}, \frac{1}{c}. —$$

și dacă construim pe aceste axe un elipsoid, el va fi reprezentat prin ecuația : $a^2 x^2 + b^2 y^2 + c^2 z^2 = 1$. —

care se numește : elipsoid invers. —

Acest elipsoid ne dă mijlocul de a găsi viteza de pro-

pagare a undelor plane, în o direcțiune oare-care. — În ade-
văr, după cele ce am spus, relativ la elipsoidul direct, după



o direcțiune ON se pot propa-
ga numai două unde, a căror
vibrațiune sunt paralele cu axele
 OA și OB a elipsei de secți-
une corespunzătoare acestei
direcțiuni. Dacă după această
direcțiune se propagă două
unde plane normale și care

sunt polarizate după axele OA și OB ; vitezele acestor
unde sunt invers proporționale cu ^{sum} ~~sum~~ axele, deci cu $\frac{1}{OA}$, $\frac{1}{OB}$.

Dacă direcțiunea este astfel în cât secțiunea normală
coincide cu planul principal ZOY de ex. cele două direcți-
uni OA și OB se confundă cu axele principale OZ și OY a
elipsoidului și cele două unde plane corespunzătoare se pro-
pagă cu viteze care sunt invers proporționale cu aceste axe.

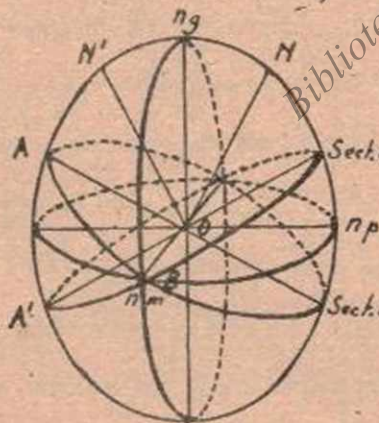
În acest caz vibrațiunile au loc în planuri de simetrie,
paralele cu axele de simetrie a elipsoidului; deci raza lumi-
noasă va coincide cu normala la undă. — Atunci după axele
principale, razele luminoase fiind normale la unde se pro-

pagă cu aceleași viteze ca și undele, și cantitățile a, b, c reprezintă deci vitezele de propagare a undelor sau a razelor după cele trei axe ale elipsoidului. — Aceste trei axe sunt proporționale cu cantitățile $\frac{1}{a}, \frac{1}{b}, \frac{1}{c}$, care nu sunt alt ceva decât inversele vitezelor de propagare a razelor sau a undelor, sau: indicii de refracțiune. Se admite a se însemna aceste cantități astfel:

$$\frac{1}{a} = n_p, \quad \frac{1}{b} = n_m, \quad \frac{1}{c} = n_g.$$

adică indicii după axele: mică, mijlocie și mare. —

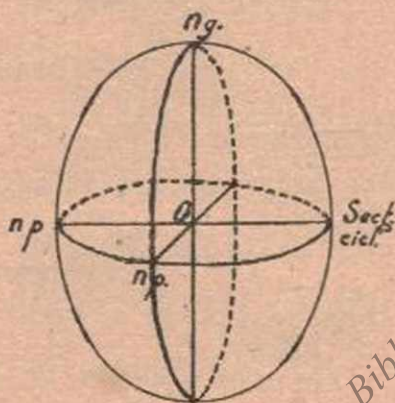
— Se știe că, în fiecare elipsoid, o secțiune care care este o elipsă a cărei axe variază în lungime după direcțiunea



Se poate da planului și prin urmare și direcțiunei ON normală pe acest plan, o direcțiune așa ca axele elipsei să devină un cerc. —

— În acest caz, undele care se propagă după ON, vor avea viteze egale după toate direcțiunile considerate în aceste secțiuni, care se numesc secțiuni Ciclice. Urmează dar că după direcțiunea cea-

sta nuse va propaga decât o singură undă și deci cristalul va fi monorefringent. — Direcțiunea normală unei Secțiuni Ciclice poartă numele de : axă optică. În cazul cel mai general, într'un elipsoid veri-care există două secțiuni ciclice și prin urmare două axe optice. —



Dacă considerăm un elipsoid de revoluțiune, nu putem avea decât o singură secțiune ciclică, care e normală pe axa de revoluțiune ; va fi deci o singură axă optică care se va confunda cu axa de revoluțiune. —

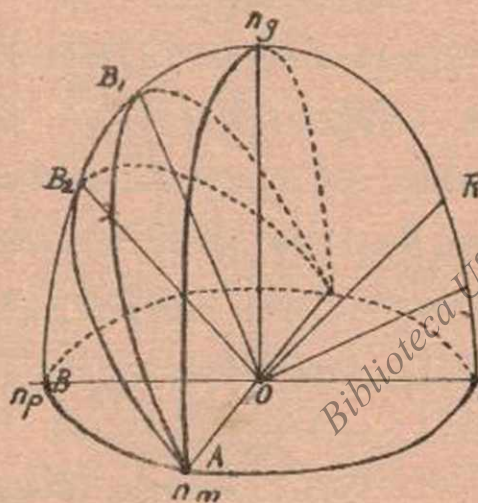
Considerând simetria diverselor sisteme cristaline putem conchide că : există două serii de cristale și anume : unele care au o singură axă optică și se numește cristale uniaxe ; și altele care au două axe optice și se numesc cristale biaxe. —

Pentru a construi suprafața de undă în cazul elipsoidului invers, să ne închipuim că, din un punct oarecare ce vibrează, pleacă mai multe unde, care după

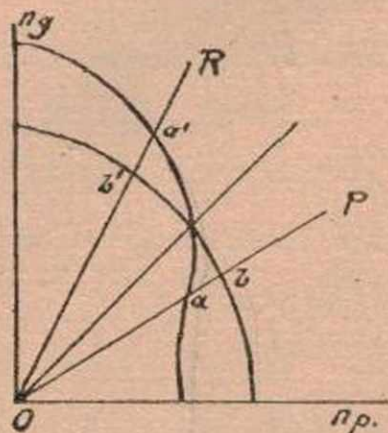
unitateu de timp ating diverse puncte, a căror loc geometric va fi o suprafață care se cheamă: Suprafața vitezelor normale. — Pentru a o obține, plecând de la origină, vom lua pe fiecare direcțiune de pro-

pagare, lungimei proporționale cu vitezele de propagare a undelor după aceste direcțiuni, și vom reuni între ele punctele astfelu obținute. —

Pentru a face construcția, să considerăm în elipsoidul invers, direcțiunile:



$OP, OR, \dots$ cărora corespund secțiunile $OB_1, OB_2, \dots$. Vom lua pe $OP, OR, \dots$ lungimile: $\frac{1}{OA}$ și $\frac{1}{OB_1}$, $\frac{1}{OA}$ și $\frac{1}{OB_2}, \dots$ care invers proporționale cu jumătățile axelor elipselor de secțiune corespondentă fiecărei direcțiuni și care reprezintă vitezele normale a undelor



corespondente. — Pe fiecare direcțiune se vor lua deci două lungimi diferite: se va obține deci pentru locul geometric a punctelor astfelu obținute o suprafață cu două axe. — Pentru a ne face idee de natura acestei suprafețe să considerăm o secțiune prin planul np , care va fi reprezentată prin figura precedentă. —

— Am văzut că cristalii se împart în două grupe: uniaxe și biaxe. — Există o anumită relațiune între simetria cristalină și cea optică. — În adevăr: dacă considerăm un cristal având o singură axă de simetrie binară, dacă facem să se învârtă cristalul în jurul acestei axe structura sa internă nu se va schimba pentru o învârtitură de 180° . Așa pentru un cristal monoclinic, dacă axa binară coincide cu una din axele elipsoidului, celelalte două axe se vor afla în planul de simetrie într'o poziție oarecare. —

Dacă cristalul este ortorombic, axele elipsoidului coincid cu cele trei axe de simetrie binară a cristalului. —

Pe când dacă considerăm un cristal tetragonal romboedric hexagonal, în planul perpendicular pe axa

principala, găsim mai mai mult decât două axe de simetrie binară și fiind că fiecare trebuie să coincidă cu o axă din secțiunea eliptică, aceasta având mai mult decât două axe egale, va fi un cerc. — Deci elipsoidul e de revoluțiune în jurul axei principale. — În fine pentru cristali cubici, elipsoidul se reduce la o sferă. —

Capitol VI

Dubla refracțiune în cristalele uniaxe.

Am văzut că în fiecare cristal birefringent, trebuie să considerăm cei doi elipsoizi: direct și invers, construiți fiecare pe cele trei axe, care sunt:

Pentru elipsoidul direct: —

v_g axa mare

v_m axa medie

v_p axa mică.

Pentru elipsoidul invers:

$n_p = \frac{1}{v_g}$ axa mică

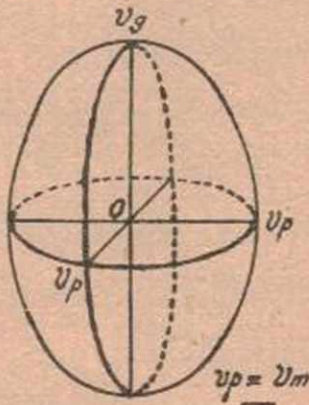
$n_m = \frac{1}{v_m}$ axa medie

$n_g = \frac{1}{v_p}$ axa mare

După cum am văzut, la cristalele uniaxe elipsoidul

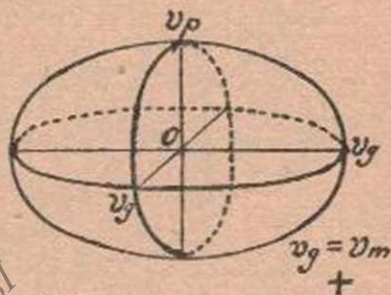
este de revoluție în jurul axei principale, așa că nu are de cât o singură secțiune ciclică. —

Elipsoidul fiind de revoluție, putem avea cazurile următoare : — Pentru elipsoidul direct se poate avea :



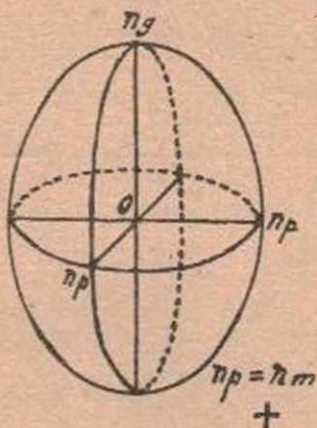
$$1^{\circ} v_p = v_m,$$

deci, elipsoidul va fi de revoluție în jurul lui

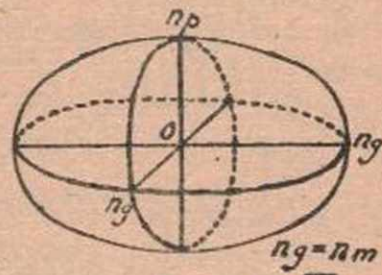


lui v_p și va rezulta prin rotația unei elipse în jurul axei sale mari. —

2^o $v_g = v_m$. Atunci elipsoidul va fi de revoluție în jurul lui $o p$, și va fi născut prin rotația



unei elipse în jurul axei mici. —

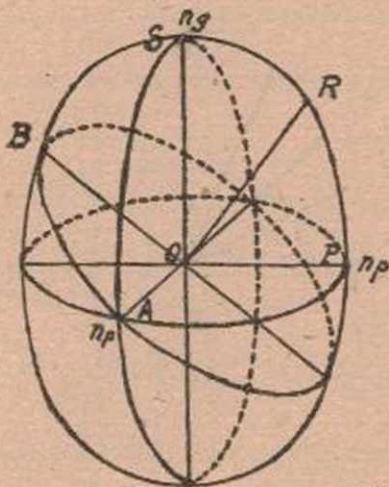


Aceleași considerațiuni

se aplică la elipsoidul invers, care poate avea ca axă de revoluție, sau pe n_p , sau pe n_g . —

Orice cristal ce are ca axă de rezoluție pe v_g și n_p ,

se numeste cristal negativ, pe când cristali pozitivi au V_p și n_g ca axă de revoluție. —



Pentru a vede cum se propagă undele, să considerăm un cristal pozitiv și în aceasta un elipsoid invers ($n_p = n_m$),

Dacă admitem că planu care trece prin axa principală este planul tabloului, secțiunea în elipsoid prin acest plan, va fi

o secțiune principală. — Să considerăm mai întâi o direcțiune de propagare după OP , coincidând cu axa np a elipsoidului și continuată în secțiunea principală. —

Acestei direcțiuni de propagare corespunde o secțiune normală, care este elipsa ce are ca axe: $OA = np$ și $OS = ng$, — și după cele ce știm, după aceste direcțiuni se propagă două unde, a căror viteze de propagare sunt vitezele principale: $V_g = \frac{1}{n_p}$ și $V_p = \frac{1}{n_g}$, iar vibrațiunile sunt paralele cu cele două axe a elipsei. — Dacă considerăm o altă direcțiune de propagare OR , continuată tot în secțiunea principală, secțiunea normală corespon-

denta, va avea ca axe pe OA și OB , și cele două unde se propagă cu vitezele: $\frac{1}{OA} = \frac{1}{mp} = V_g$ și $\frac{1}{OB} = V'_g$. --

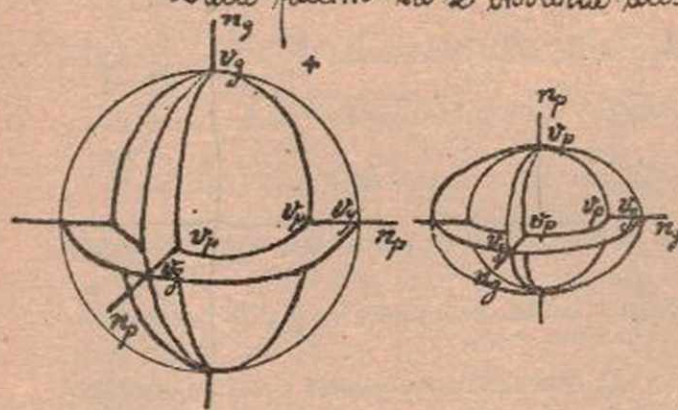
În fine; dacă direcțiunea de propagare se confundă cu OS , care coincide cu ng , axa de revoluție a elipsoidului, secțiunea corespunzătoare acestei direcțiuni, este secțiunea ciclică; deci cele două unde se propagă cu aceeași viteză: $\frac{1}{OA} = V_g$, adică: în această direcțiune nu se propagă decât o singură undă..

În rezumat: pentru ori ce direcțiune de propagare a undelor într-un cristal uniax, există totdeauna două unde care se propagă cu viteze deosebite: una ordinară, se propagă în tot deama cu aceeași viteză: $\frac{1}{mp} = V_g$, pe când cea-laltă, undă extraordinară, se propagă cu viteză variabilă, după direcțiune, între: $\frac{1}{OA} = V_g$ și $\frac{1}{OS} = V'_g$. --

Este ușor de văzut că, vibrațiunea ordinară a vînd lor după OA , va fi tot de-a-una perpendiculară pe secțiunea principală, pe când vibrația extraordinară va fi în această secțiune principală: undă ordinară va fi deci polarizată în secțiunea principală, iar cea extraordinară perpendiculară pe această secțiune. --

Pentru a găsi suprafața vitezelor normale, se determină mai întâi intersecția sa cu o secțiune principală, și apoi se întoarce această intersecțiune în jurul axei de revoluție.

Tom lua deci pe fiecare direcție de propagare, plecând de la origine, atât într-o direcțiune cât și în direcția contrară, lungimi invers proporționale cu semii axelor elipselor corespondente. Se obține astfel: un cerc de rază $\frac{1}{v_p} = v_g$ sau $\frac{1}{n_g} = v_p$ (primul pentru un cristal pozitiv, al doilea pentru unul negativ), care corespunde unei ordinare; și o curbă ovală inversă elipsei, construită pe n_g și n_p , corespunzătoare unei extraordinare. Aceste două curbe se ating în două puncte corespunzătoare axei optice.



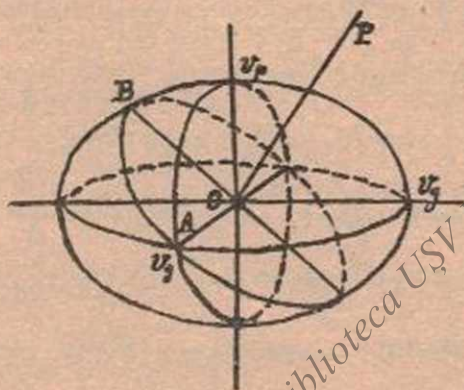
Dacă facem să se învârtă aceste două curbe în jurul axei de revoluție, care este axa optică, se obține pentru suprafața vitezelor normale, mai întâi: o sferă

de rază: $\frac{1}{n_p} = v_g$ sau $\frac{1}{n_g} = v_p$; și un ovaloid de revo-

lutiune, a căruia axe sunt: $\frac{1}{n_p} = V_g$ și $\frac{1}{n_g} = V_p$. -

Când cristalul este pozitiv, sfera este exterioră ovaloidului, sau contrariul pentru un cristal negativ. -

- Pentru a obține suprafața de undă, vom face o construcție analoagă, însă luând în considerare elipsoidul direct. Pentru un cristal pozitiv, elipsoidul direct, are ca axă de revoluție pe V_p . În acest caz, o direcție careare OP .



va da două raze, care se propagă cu viteze proporționale cu axele OA și OB a elipsei corespunzătoare; axa OA rămâne constantă, pe când OB variază între V_g și V_p . una din raze care merge cu o viteză constantă, va fi raza ordinară, pe când cea-l-altă având o viteză variabilă, va fi raza extraordinară.

Suprafața de undă se va obține deci, luând pe fiecare direcțiune de propagare, vitezele de propagare date de cele două axe a elipselor corespondente. -

Ea va consista: din o sferă (analoga cu cea a suprafeței vitezelor normale) de rază V_g , corespunzătoare razei ordinare; și un elipsoid de revoluție (având aceleași axe V_g și V_p ca și ovaloidul de la suprafața vitezelor normale) corespunzător razei extraordinare. Cele două suprafețe se ating în două puncte, prin care trece axa optică. În cristalele pozitive, raza ordinară se propagă mai repede decât cea extraordinară, iar în cele negative e contrariu..

Ne rămâne de studiat cum se propagă razele refractate în diversele cazuri ce se pot prezenta, și care este forma suprafeței de undă corespunzătoare acestor raze --

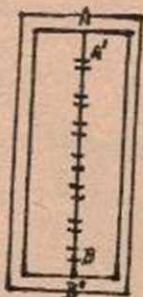
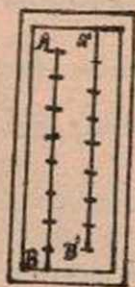
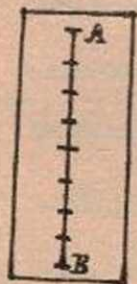
Știm că după Fresnel raza ordinară are vibrațiile sale perpendiculare pe secțiunea principală, este polarizată prin urmare în această secțiune principală, și se refractază ca și când corpul ar fi isotrop, - adică, rămâne totdeauna în planul de incidență, cu un indice de refracție constant. Pe când raza extraordinară polarizată perpendicular pe secțiunea principală are vibrațiile paralele cu secțiunea principală și nu rămâne în planul de incidență de cât în afara --

mite cupriri, - pe care le vom studia mai în urmă. -

- Pentru a determina forma suprafeței de undă corespunzătoare celor două raze, observăm că, în ce privește raza ordinară, cristalul se comportă ca o substanță izotropă și deci suprafața de undă este o sferă. Să căutăm dar a determina în mod experimental care e forma undei corespundență razei extraordinară. -

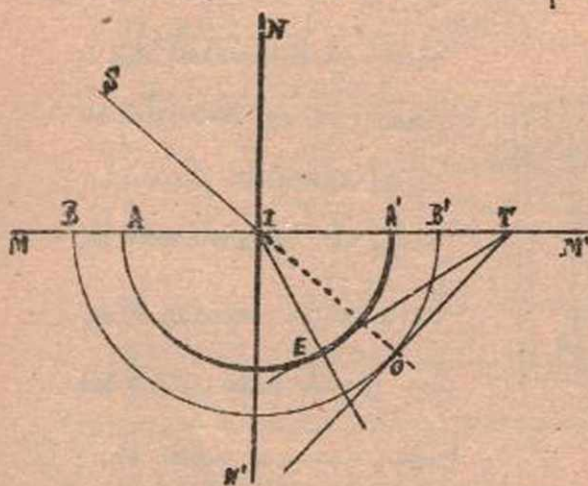
Să considerăm un cristal uniax și să ținem în acest cristal o lamă cu fețe paralele și care să continue direcțiunea axei. -

Să luăm pe o foaie de hârtie o linie divizată într-un număr oare-care de diviziuni egale, și să o pri-



rim cu o lunetă de pusă așa ca dreapta să se găsească în planul vertical determinat de lunetă în mișcarea sa în jurul axei care o susține, așa că linia să

coincida totdeauna cu încrucișarea firelor reticulului. - Să punem atunci pe foaia de hârtie, lama tăiată în cristalul birefringent: privind atunci prin lunetă vom vedea două imagini a liniei una alături de alta. Însă dacă înturnăm cristalul pe foaia de hârtie vine un moment când cele două imagini se suprapun și cele două drepte sunt pe prelungirea una alături de alta. Pentru a găsi încă o poziție pentru care acest lucru să aibă loc, va trebui să întoarcem cristalul de 90° și atunci direcția a-
xei va fi perpendiculară pe linie. Putem spune dar că în aceste două cazuri, raza care iese din lunetă și cade pe lama birefringentă, se separă în două raze, așa că raza extraordinară se află în planul de incidență



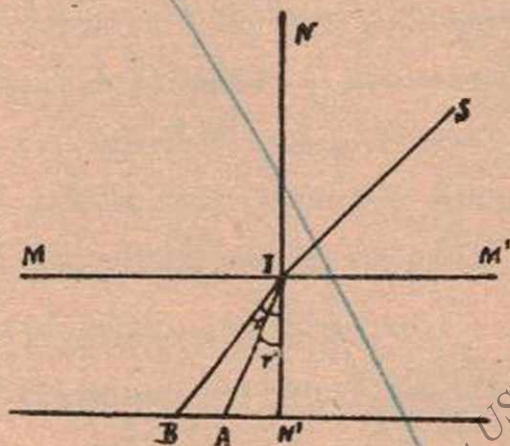
Vom considera cazul în care axa cristalului este în planul de incidență, căci aceasta ne va permite de a determina forma suprafeței de undă;

corespunzătoare razei extraordinare. - Pentru aceasta să considerăm planul figurerii ca plan de incidență, și fiind că axa cristalului se găsește în planul de separație a aerului de cristal, și prin urmare și în planul de incidență, direcția sa se poate confunda cu $M.M'$. -

Dacă SI este raza incidentă, vom construi mai întâi după regula lui Huygens cercul BOB care este secțiunea prin planul figurerii în sferă, care reprezintă suprafața de undă corespunderazei aerului, și o secțiune care care AEA' în suprafața de undă corespunderazei extraordinare, a cărei formă vom să o determinăm. Prin construcție determinăm numai direcția IE a razei extraordinare. - Însă în experiența noastră, privind prin lunetă vedem cele două imagini suprapuse și liniile pe prelungirea una altia; în același timp noi mai observăm că două direcțiuni diferite de pe cele două linii coincid cu încrucișarea firelor reticulului: una BI corespunderazei ordinare, și alta FI razei extraordinare, care ies din cristal după aceeași

- 70 -

direcțiune SI. Fie m diferența numerilor diviziunilor care coincid. -



Atunci noi putem zice că: dacă raza SI cade pe cristal, ea dă două raze IA. și IB. care vin la niste diviziuni ce diferă de m . Dacă însemnăm cu e grosimea IN' a lamelei, putem determina valoarea lui BN' prin relația:

$$BN' = IN' \tan B \hat{I} N' = e \tan r \dots \dots (1)$$

r fiind cunoscut că unghiul de refracție a razei ordinare, dat prin relația:

$$\sin r = n \sin i.$$

n fiind indicele ordinar iar i unghiul ce face axa lunetei cu verticala -

Cunoscând deci valoarea lui BN' și nu -

mărul corespunzător lui B, putem deduce direcțiunea corespunzătoare lui N'. Atunci triunghiul AIN' ne dă:

$$AN' = IN' \operatorname{tg} r' \quad \text{și} \quad \frac{AN'}{IN'} = \operatorname{tg} r' \dots \dots \dots (2)$$

r' fiind unghiul de refracțiune al razei extraordinare..

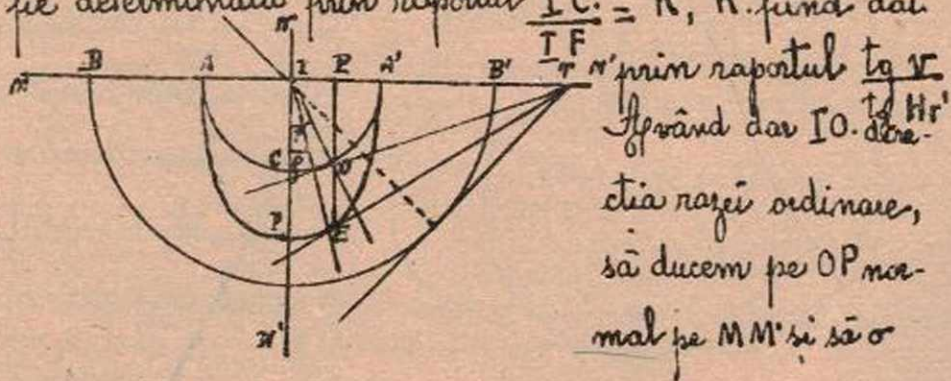
Dirigând egalitățile (1) și (2) avem:

$$\frac{BN'}{AN'} = \frac{\operatorname{tg} r}{\operatorname{tg} r'}$$

Însă experiența probază că, raportul $\frac{BN'}{AN'}$ este constant, ceea ce arată că:

Secțiunea în undă extraordinară este o elipsă..

Pentru a construi dar direcția razei extraordinare, vom relua construcția lui Huygens, și pe AA' ca axă mică, vom construi o elipsă a cărei axă mare să fie determinată prin raportul $\frac{IC}{IF} = K$, K fiind dat



prin raportul $\frac{\operatorname{tg} r}{\operatorname{tg} r'}$.
Având dar IO. direcțiunea razei ordinare, să ducem pe OP normal pe MM' și să o

prelungim până ce întâlnește elipsa în punctul E. Atunci IE reprezintă raza extraordinară, corespunzătoare razei incidente SI. - În adevăr: elipsa ne dă: $\frac{PE}{PO} = \frac{IC}{IF} = K$

Triunghiul IPO ne dă: $IP = PO \operatorname{tg} r. (1)$

Tar triunghiul IPE ne dă:

$$IP = PE \operatorname{tg} PEI = PE \operatorname{tg} EIC = PE \operatorname{tg} \varphi. (2)$$

Deci:

$$PO \operatorname{tg} r = PE \operatorname{tg} \varphi \text{ sau:}$$

$$\frac{\operatorname{tg} r}{\operatorname{tg} \varphi} = \frac{PE}{PO}$$

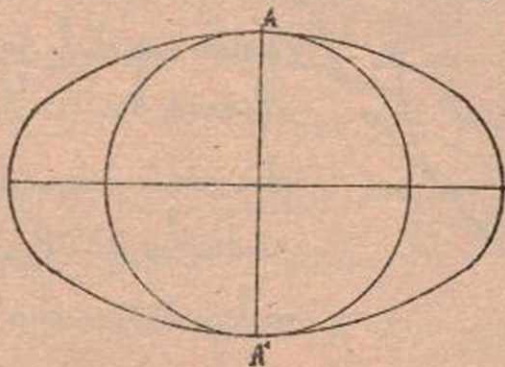
Însă am găsit: $\frac{PE}{PO} = K$ deci: $\frac{\operatorname{tg} r}{\operatorname{tg} \varphi} = K$

Și fiind că experimenta ne odată: $\frac{\operatorname{tg} r}{\operatorname{tg} \varphi} = K$

urmează că: $r' = \varphi$ pentru valori mici mici de

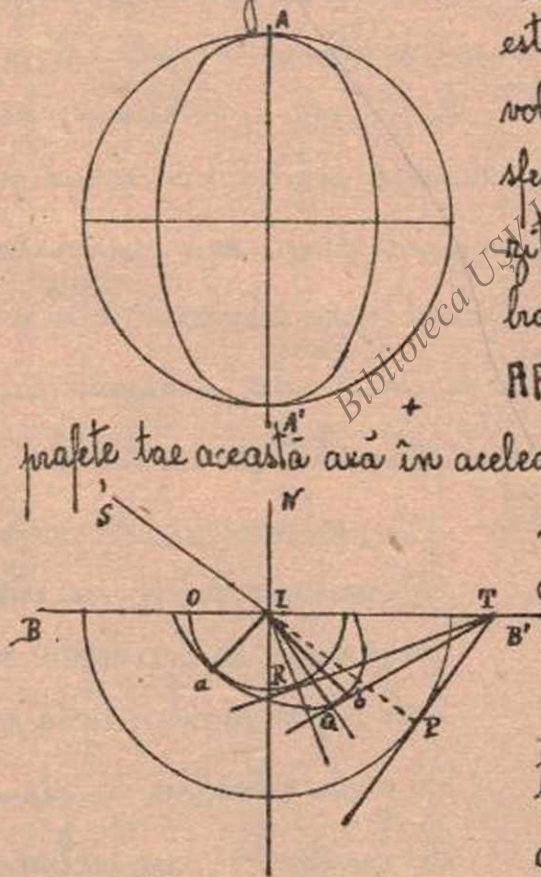
90°..

Deci IE reprezintă raza extraordinară..



Rezultă dar că, suprafața de undă corespunzătoare razei extraordinare, este un elipsoid de revoluție în jurul unei principale. Cele două suprafețe de undă

sunt concentrice, însă viteza lor de propagare relativă depinde de viteza de propagare a celor două raze corespondente. Iată: când viteza de propagare a razei extraordinare este mai mare, elipsoidul este turtit după axa de revoluție și este exterior sferei: în acest caz cristallul este negativ. - Pentru cazul contrar elipsoidul



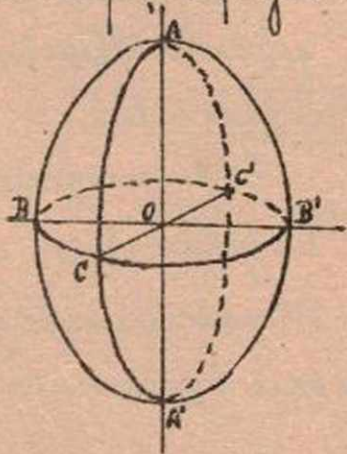
este lungit după axa de revoluție, este în interiorul sferei și cristallul este pozitiv. Fiind că viteza vibrațiunii este aceeași după axa AA' , rezultă că cele două suprafețe tăie această axă în aceleși puncte, unde au axă comună, deci ele sunt tangente una altuia în punctele A și A' .

Pentru a construi direcția razei ordinare și extraordinare să considerăm BB'

ca suprafață de separare a celor două medii: aerul și corpul

birefringent, să fie SI direcția razei incidente.. Să construim mai întâi cercul corespunzător mediului exterior (aerul) și prin punctul P. unde SI prelungit atinge acest cerc să ducem planul tangent, care ne dă ca suprafața de separație o dreaptă de intersecție a cărei urmă este B. - Apoi construim o sferă O cu o rază corespunzătoare vitezei razei ordinare, și planul tangent TR, care ne dă raza ordinară RI. Construim apoi elipsa corespunzătoare razei extraordinare, având Ia ca axă mică și Ib ca axă mare corespunzând vitezei razei extraordinare.

Porțiia razei extraordinare este variabilă și depinde de orientarea feței de incidență în raport cu axa cristalului și cu orientarea planului de incidență în raport cu fața refringentă. - De ordinul acestei raze

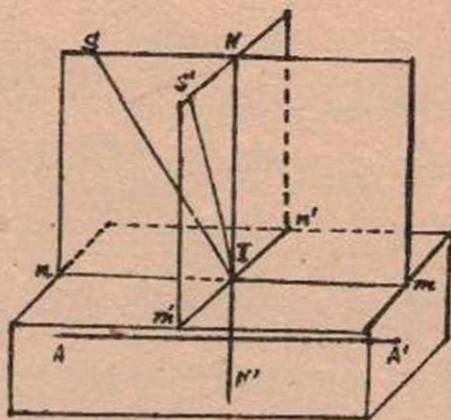


extraordinară I_Q. nu este în planul de incidență: sunt însă cazuri când această rază poate rămâne în planul de incidență, care trebuie să fie un plan de simetrie a elip

solidului de revoluție. - Însă, într'un elipsoid de revoluție avem ca planuri de simetrie, acele ce trec prin 'axa de revoluție, precum sunt: ABA' , ACA' , precum și planul $BCB'C'$ normal la axă. -

Deci: pentru ca raza extraordinară să rămână în planul de incidență trebuie ca, acest plan de incidență să fie paralel sau perpendicular pe axa optică a cristalului. -

Apăs: raza SI căzând pe fața $abcd$ a unui



cristal uniax, și una axă AA' pe această față fiind $m \cdot n$, este evident că, raza extraordinară rămâne în planul de incidență, dacă acest plan

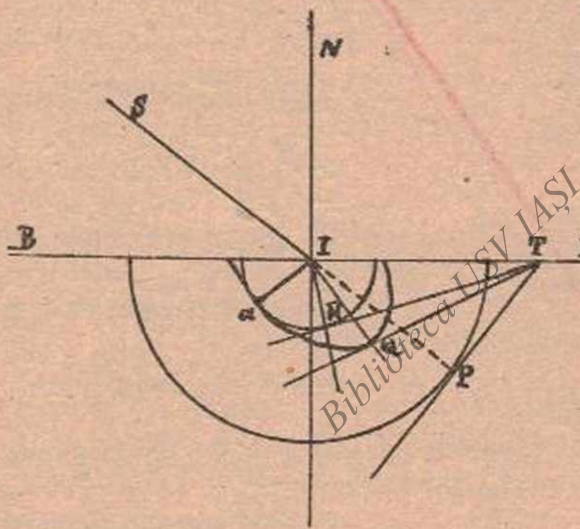
este: SI_{m-n} , sau $S'I_{m'n'}$.

Să aplicăm construcția lui Huygens pentru aceste două cazuri. —

I. Planul de incidență e paralel cu axa optică a cristalului. - În acest caz construcția este identică

cu acea a carului gene-
ral, pe care-l-am
examinat mai înainte.

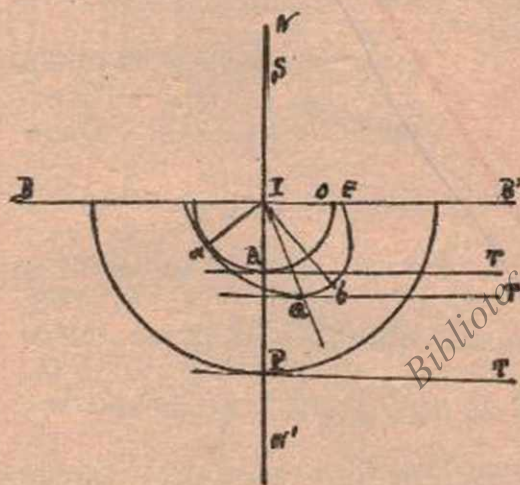
Raza extraordinară
rămâne în planul
de incidență, însă in-
dicele său de refracție
variază cu unghiul
de incidență. -



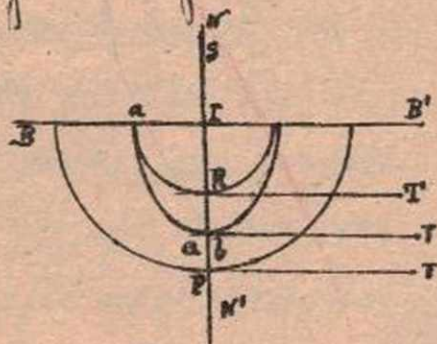
De aceea vom avea de considerat mai multe cazuri:

a). Raza incidentă este normală la față, deci se confundă cu normala la față. În acest caz, planul tangent la sferă corespunzătoare mediului exterior este paralel cu față și prin urmare atinge această față la infinit. Considerând sfera O și elipsoidul

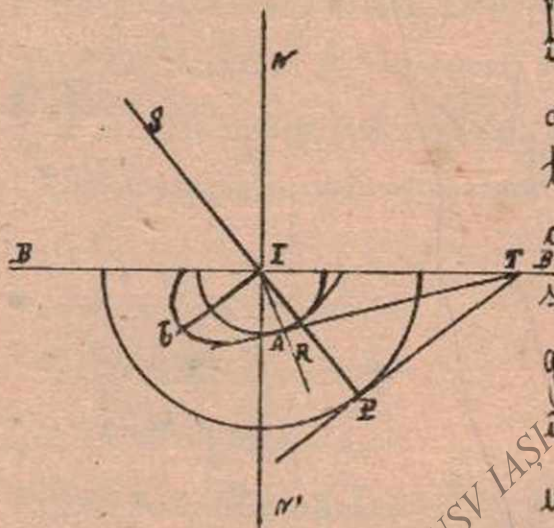
E, planul tangent ne dă: pentru sfera O punctul de contact R , pe raza SI sau NN' : deci raza ordinară nu este deviată; pe când punctul de contact U pe elipsoid are o oare care poziție: deci raza extraordinară este deviată, dar rămâne în planul de incidență...



b). Dacă în cazul precedent axa mică IG este paralelă cu fața, atunci punctele R și U se găsesc ambele pe prelungirea lui SI , și prin urmare nici o rază nu e deviată, dar ele se propagă cu viteze diferite.



c) Dacă axa mică a elipsei are o poziție oare care în planul de incidență și raza incidentă este dirijată așa că, raza ordinară să se propage paralel cu aceasta.



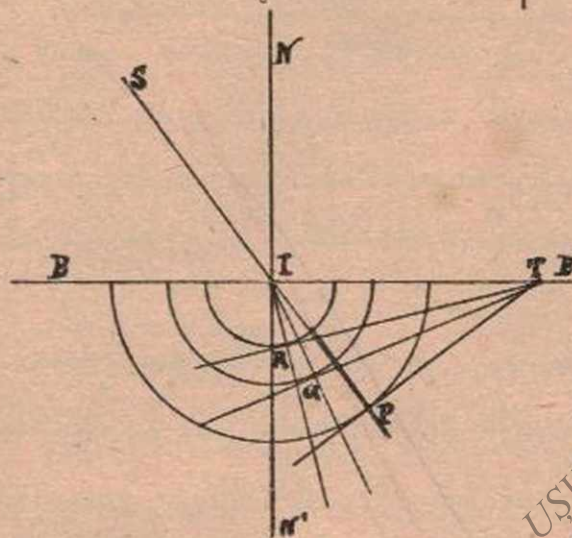
axă IA , atunci planul tangent atinge sfera corespunzătoare razei ordinare în punctul A , unde axa atinge sfera. Însă punctul A este punctul de contact al sferei cu elipsoidul, deci planul tangent va atinge elipsoidul în același punct. - Prin urmare: raza extraordinară urmează direcția

razei ordinare, și deci nu este decât o singură rază refractată după axa IA și deci și o singură undă plană TA . Deci: după axa optică cristalul se comportă ca o substanță monorefringentă. -

II) Planul de incidență e perpendicular pe axă. -

În acest caz planul figurei tale elipsoidul după un cerc, așa că vom avea trei cercuri concentrice, construite cu raze proporționale cu vitezele: în mediul exterior, în raza ordinară și în raza extraordi-

nară... Raza cercului corespunzător indicii extraordinare este raza ecuatorială a elipsoidului de revoluție.



Însă fiind că aceste raze sunt constante, vitezele corespunzătoare sunt și ele constante, și atunci indiciile de refracție corespunzătoare sunt și ei constante, căci avem:

$$n_o = \frac{\sin i}{\sin r_o} = \frac{V}{V_o} \text{ și } n_e = \frac{\sin i}{\sin r_e} = \frac{V}{V_e} \dots$$

Deci: pentru a determina indiciul ordinar și extraordinar, trebuie să operăm în condițiile fixate mai sus.

Dacă raza incidentă devine normală planului de separație a celor două medii, cele două raze I Q și I R se propagă după aceeași dreaptă, care este prelungirea razei incidente, însă cu viteze diferite.

Capitol

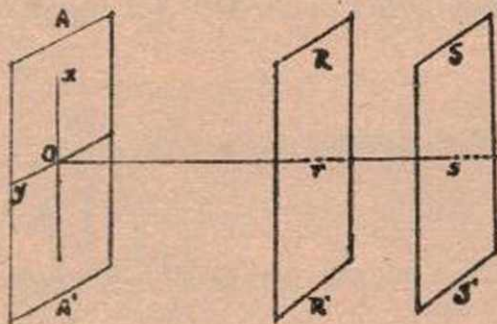
Dubla refracțiune în cristali biaksi.

Cristali biaksi aparțin sistemelor: ortorombic, monoclinic și triclinic. În acești cristali există două direcțiuni după care lumina se propagă ca într-un mediu isotrop.

Pentru cristali aparținând acestor trei sisteme există o analogie:

Forma suprafeței de undă este aceeași, dacă considerăm o lumină de perioadă determinată; iar ca diferență avem ca: orientarea acestei suprafețe de undă, variaza cu valoarea lungimii de undă a luminii într-o anumită, în raport cu simetria cristalului considerat.

Pentru a determina forma generală a suprafeței



de undă, să considerăm o undă plană AA' a cărei direcțiune de propagare este OX . După teoria generală a dublei refracțiuni, la origina

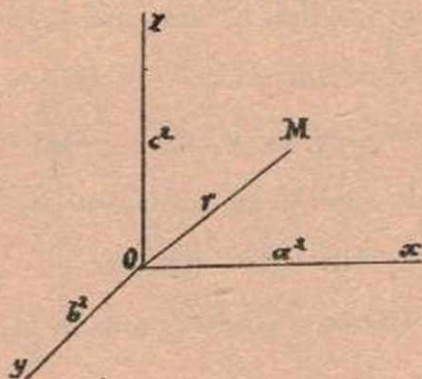
mișcării vibratoare, putem considera această undă

ca rezultatul suprapunerii a două unde a căror direcțiuni de vibrațiune sunt dreptunghiulare, Să căutăm a determina pozițiunea lor după un timp t . -

Știm de asemenea că: coeficientul de elasticitate nu este același pentru cele două unde și că vitezele de propagare nu sunt aceleasi; deci după timpul t va fi o diferență de drum și cele două unde vor fi în pozițiuni diferite, însă rămânând paralele cu AA' . Fie RR' și SS' aceste două unde. Dacă considerăm toate undele plane corespunzătoare direcțiunilor trecând prin O , și ducă din punctul O ca centru descriem suprafețele de undă generale, tangente undelor plane RR' și SS' , vom obține suprafețe învâlituare, care vor reprezenta suprafețele de undă corespunzătoare undelor plane RR' și SS' după timpul t . - Pentru a stabili ecuația acestei suprafețe de undă, să urmăm metoda lui Fresnel. -

Fie Ox , Oy , Oz trei axe de coordonate dreptunghiulare, corespunzătoare celor trei axe de elasticitate a unui cristal, și fie: a^2 , b^2 , c^2 coeficienții de elasticitate corespunzători acestor axe. - Dacă M este un punct

de pe suprafața undei, a cărei coordonate sunt: x, y, z , și
 r raza vectorie OM, putem scrie:



$$r^2 = x^2 + y^2 + z^2 \dots \dots \dots (1)$$

iar ecuația generală a suprafeței
 din care M face parte se poate scrie:

$$\frac{a^2 x^2}{r^2 - a^2} + \frac{b^2 y^2}{r^2 - b^2} + \frac{c^2 z^2}{r^2 - c^2} = 0$$

Putem da acestei ecuații altă
 formă:

Să alungăm mai întâi numitorii:

$$(r^2 - b^2)(r^2 - c^2)a^2 x^2 + (r^2 - a^2)(r^2 - c^2)b^2 y^2 + (r^2 - a^2)(r^2 - b^2)c^2 z^2 = 0 \quad (2)$$

Dacă facem operațiunile, obținem o ecuație de al 6^{lea}
 grad, care se poate scrie:

$$r^4(a^2 x^2 + b^2 y^2 + c^2 z^2) - r^2[(b^2 + c^2)a^2 x^2 + (c^2 + a^2)b^2 y^2 + (a^2 + b^2)c^2 z^2] + a^2 b^2 c^2(x^2 + y^2 + z^2) = 0.$$

Si considerând ecuația (1) putem scrie:

$$r^2[r^2(a^2 x^2 + b^2 y^2 + c^2 z^2) - \{(b^2 + c^2)a^2 x^2 + (c^2 + a^2)b^2 y^2 + (a^2 + b^2)c^2 z^2\} + a^2 b^2 c^2] = 0.$$

Avem aici un produs de doi factori egal cu zero. Dacă
 punem: $r^2 = 0$, aceasta nu reprezintă nimic; pe când dacă

punem cantitatea din paranteză egală cu zero, aceasta reprezintă o suprafață de al ⁴lea grad care corespunde suprafeței de undă căutată. -

Pentru a ne face o idee de forma acestei suprafețe, să căutăm să determinăm care este forma secțiunilor obținute prin planurile de elasticitate, în această suprafață. -

Pentru a avea secțiunea prin planul $x y$, trebuie să considerăm: $z=0$. Atunci ecuația (2) devine:

$$(r^2 - c^2) [(r^2 - b^2) a^2 x^2 + (r^2 - a^2) b^2 y^2] = 0 \dots$$

care se poate scrie încă:

$$(r^2 - c^2) [r^2 (a^2 x^2 + b^2 y^2) - a^2 b^2 (x^2 + y^2)] = 0 \dots$$

Și, fiind că: $r^2 = x^2 + y^2 + z^2$ și $z^2 = 0$, deci: $r^2 = x^2 + y^2$.

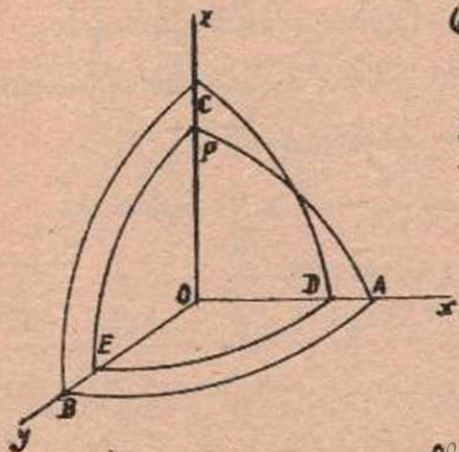
putem scrie: $r^2 (r^2 - c^2) (a^2 x^2 + b^2 y^2 - a^2 b^2) = 0 \dots$

Deci: Secțiunea prin planul $x y$ ne dă:

1^a Pentru $r^2 = 0$, un cerc redus la centru.

2^a Pentru $(r^2 - c^2) = 0$ avem un cerc a cărui centru este în originea coordonatelor, și a cărui rază este egală cu rădăcina pătrată din coeficientul de elasticitate corespunzător direcției Z , perpendiculară pe $x y$; și 3^a Pentru: $a^2 x^2 + b^2 y^2 - a^2 b^2 = 0$ sau $\frac{x^2}{b^2} + \frac{y^2}{a^2} = 1 \dots$ avem o elipsă concentrică,

a cărei jumătate de aer sunt rădăcinile pătate din coeficientii de elasticitate corespundenți direcțiunei celei-lalte axe. -



Dacă vom cieta secțiunile prin cele lalte planuri, găsim încă două secțiuni: un cerc și o elipsă, după cum se vede reprezentat în figura. -

Putem urma după Fresnel, studiul acestei formule pentru cazuri speciale. - Așa: pentru substanțele izotrope sau pentru cristalii uniaceși, vom ajunge la aceleași rezultate ca acele pe care le dă experiența. -

Să examinăm ca derivate formula pentru cristalele uniace. Pentru aceasta, în formula

(2) vom face: $a = b$. - vom avea:

$$(r^2 - a^2) [(r^2 - x^2) a^2 (x^2 + y^2) + (r^2 - a^2) c^2 z^2] = 0.$$

Adăugând și scăzând în paranteză cantitatea:

$(r^2 - c^2) a^2 z^2$ avem:

$$(r^2 - a^2) [(r^2 - c^2) a^2 (x^2 + y^2 + z^2) + (r^2 - a^2) c^2 z^2 - (r^2 - c^2) a^2 z^2] = 0.$$

și fiind că: $r^2 = x^2 + y^2 + z^2$ rezultă:

$$r^2(r^2 - a^2)[a^2(r^2 - c^2) + z^2(c^2 - a^2)] = 0.$$

sau: $r^2(r^2 - a^2)[a^2(x^2 + y^2) + c^2z^2 - a^2c^2] = 0.$

Putem descompune această ecuație în două:

$r^2 - a^2 = 0$ Care este ecuația unui cerc corespunzător unei

sferă; și

$$a^2(x^2 + y^2) + c^2z^2 - a^2c^2 = 0. \text{ sau } \frac{x^2 + y^2}{c^2} + \frac{z^2}{a^2} - 1 = 0.$$

care este ecuația unui elipsoid de revoluție în jurul lui Ox, a cărei semi axă de revoluție a este egală cu raza

sferii, și după cum avem: $a^2 > c^2$ sau $a^2 < c^2$ elipsoidul este interior sau exterior sferei, iar cristallul este: pozitiv sau negativ.

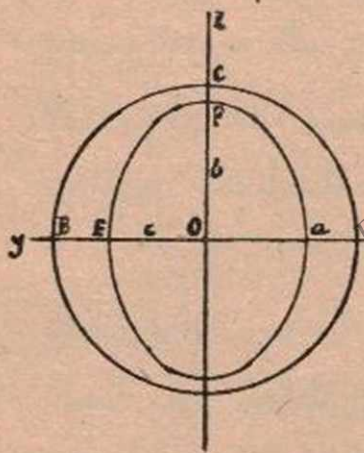
Pentru cristalele biaxe, cele trei axe de elasticitate se pot confunda sau nu cu axele cristalografice după sistemul cristalin considerat. - Dar, când o axă de elasticitate nu se confundă cu o axă cristalografică, constatăm prin experiență că, direcția axei de elasticitate variază cu lungimea de undă a luminei, care trece prin cristal, ceea ce se explică zicând că: este disparsiunea axelor de elasticitate, fenomen pe

care l vom examina, când vom trata studiul cista-
lilor în lumină convergentă. -

Fiind că cei trei coeficienți: a , b , c , sunt dife-
riți pentru acești cristali, suprafața de undă este
reprezentată în secțiune prin figura precedentă. -

Si fiind că admitem: $a > b > c$ avem rezultatele
următoare:

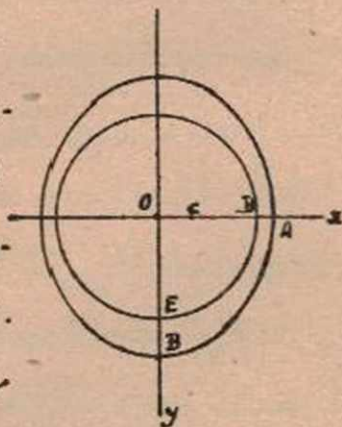
Secțiunea prin planul YOZ este un cerc



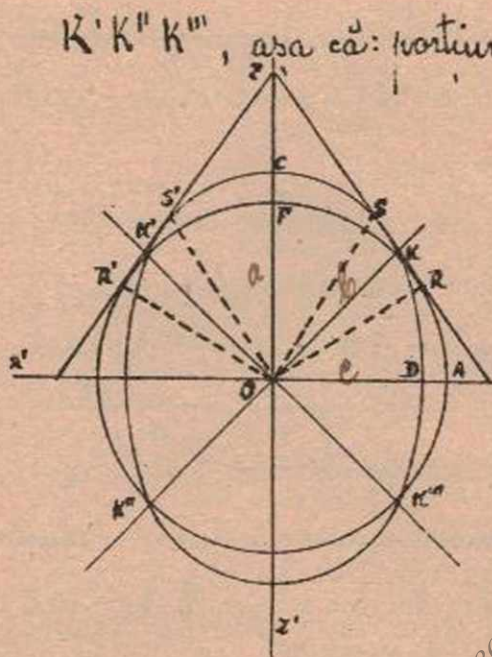
B.C. exterior de
rază c și o eli-
psă interioară

EF , având axe-
le: $OF = b$, $OE = c$.

Secțiunea prin
planul XOY .



ne dă: un cerc interior ED de rază c și o elipsă exteri-
oară, a cărei axe sunt: $OB = a$, și $OA = b$. În fine sec-
țiunea prin planul XOZ este: un cerc AF de rază:
 $OA = b$, și o elipsă CD , a cărei axe sunt: $OC = a$, și
 $OD = c$. - Aceste două curbe se taie în punctele K ,



$K'K''K'''$, așa că: porțiunile FK și KD sunt interioare, pe când CK și AC sunt exterioare. Dacă considerăm intersecția completă prin planul xOz , vedem că sunt 4 puncte li, care sunt comune și napei interioare și napei exterioare. Fiind că: $a > b > c$, vedem că: Ox este axa per-

pendiculară pe cercuri de rază a și se cheamă axă de cea mai mare elasticitate; pe când Oy și Oz , perpendiculare pe cercurile de rază b și c , sunt: cea întâi, axa de elasticitate medie, și cea a doua: axa de cea mai mică elasticitate.

Dacă aplicăm construcția lui Huygens, constatăm: 1^o că în cristalele liace, suprafața undeii fiind compusă din două nape și că nici una din aceste nape nefiind sferică, re-

ultimă că: fiecare sferă incidentă se descompune în două raze refractate și că ambele sunt raze extraordinare. -

2^a că, dacă planul de incidență coincide cu unul din cele trei planuri principale, cele două raze refractate rămân în planul de incidență. - În acest caz intersecția suprafeței de undă cu planul de incidență dă: un cerc și o elipsă. Raza corespunzătoare secțiunii circulare are o viteză constantă V ; în planul de incidență, și prin urmare un indice de refracție constant. Cea-laltă rază nu mai are indice de refracție constant, însă ia valori determinate, când este perpendiculară pe axa de: mare, mijlocie sau mică elasticitate. Avem atunci:

$$n_a = \frac{V}{a}, \quad n_b = \frac{V}{b}, \quad n_c = \frac{V}{c}. -$$

n_a, n_b, n_c sunt cele trei valori a indicilor de refracție, determinate în aceste condiții. -

Dacă considerăm planul tangent R.S. la elipsă și la cerc, putem constata, prin aplicarea

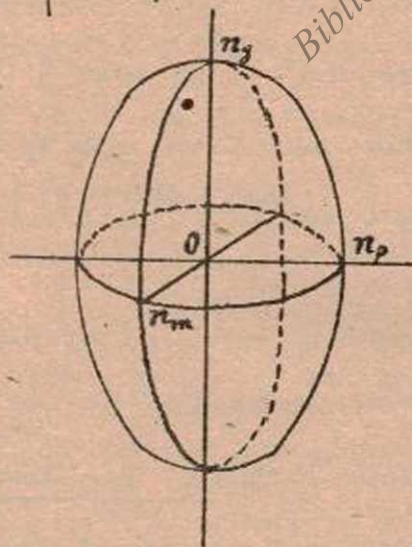
construcției lui Huygens, că după OR unda plană se poate propagă cu aceeași viteză, ori că se va fi polarizată ei. - Aceasta direcțiune este o axă optică. Vedem că există două axe: OR și OR' care fac unghiul ROR' determinat prin formula supra-
fetii de undă și prin valorile vitezelor proprii.
pale. -

② În considerarea figuri constatăm că: dacă rayă b a cercului R.F. scade până ce devine egală cu OD , axele optice se aproprie de axa Ox de cea mai mare elasticitate, cu care ele se confundă, când $OH = OD$. Atunci avem o specie de rayă $\underline{\leq}$ în-
nălă de un elipsoid a căru axa sunt $\underline{\leq}$ și $\underline{\leq}$ și
care este de rectitudine în jurul lui Ox . Cristalul
devine uniax și negativ. -

Cristalul liamă a căror construcția a unghiului
asculit a axelor optice, coincide cu axa de cea
mai mare elasticitate sunt Cristali negativi;
îând aceasta bisectița coincide cu axa de cea
mai mică elasticitate, cristalul se numește pozitiv. -

- Să vedem acum cum se poate deduce forma suprafeței de undă în cristalii brasi, prin consideratiunea elipsoidului invers și a suprafeței vitezelor normale, sau a elipsoidului direct și a suprafeței vitezelor normale, sau a elipsoidului direct și a suprafeței de undă. -

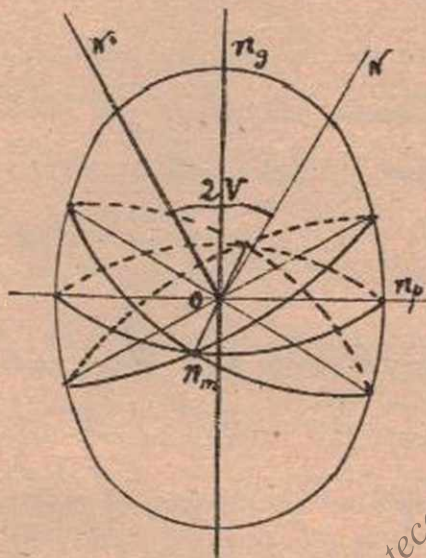
În cristalii brasi, elipsoidul invers are cele trei axe neegale: n_p , n_m și n_g : valoarea lui n_m variază între limitele n_p și n_g . Într-un asemenea solid, o secțiune oarecare trebuie să fie o elipsă, și secțiunile care trec prin câte două axe



principale sunt secțiunile principale. Însă alături de aceasta sunt încă două secțiuni care trec prin n_m și având pentru cea-laltă axă tot valoarea n_m sunt secțiuni ciclice. - Aceste două sec-

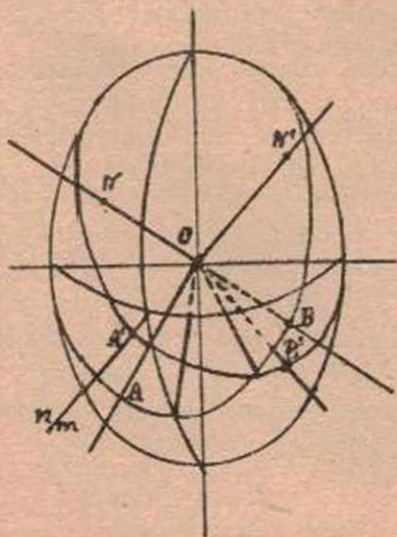
țiuni se fac după un unghi a cărui valoare de-

pinde de aceea a lui n_m în raport cu n_g și n_p . Cele două normale ON' și ON la aceste secțiuni, sunt



continute în planul n_g n_p ; după aceste direcțiuni se propagă o undă unică, cu o viteză egală cu $V_m = \frac{1}{n_m}$ polarizată într-un plan oare-care. Aceste două direcțiuni sunt axele optice, iar planul n_p n_g , care le conține, se cheamă: planul axelor optice.

— Aceste două axe optice formează



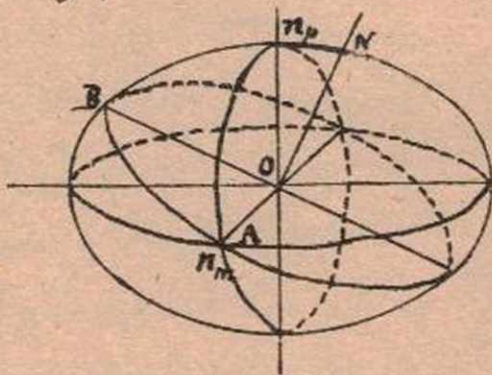
între ele un unghi ascuțit $2V$, a cărui valoare depinde de valorile lui n_g , n_m și n_p având ca bisectrice sau pe n_g sau pe n_p . Când n_g este bisectricea asu-

tită a axelor optice, cristalul este pozitiv; - dacă este
mp cristalul este negativ. -

Să considerăm acum o direcțiune oarecare
de propagare ON , în afară de o secțiune principală.

După această direcțiune se propagă două unde
polarizate normal, a căror viteze sunt deosebite și
proporționale cu axele OA și OB a elipsei corespunden-
te acestei direcțiuni. -

Pentru o altă direcțiune ON' vom avea o
altă secțiune, a cărei axe OA' și OB' sunt diferite
de OA și OB . Deci: după o direcțiune oarecare, cele
două unde care se propagă, sunt ambele extra-
ordinare, fiind să vitezele și planurile de pola-
rizatie schimbă cu direcțiunea considerată. -



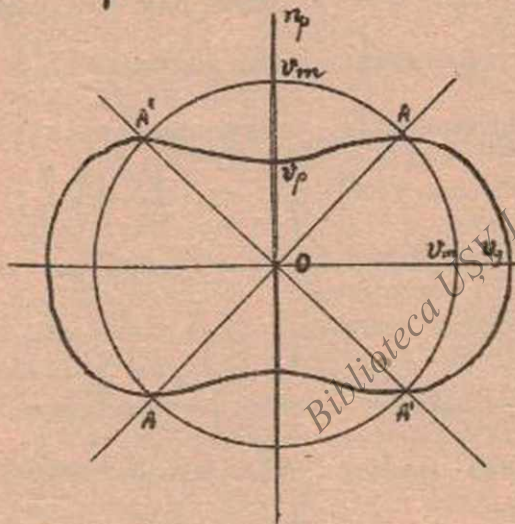
Dacă însă considerăm
direcțiunea de propagare
continuată într-o secțiune
principală: M_y M_p , sec-
țiunea normală cores-
pondentă trebuie să treacă

prin una din acele elipsoidului, așa că, secțiunea care este o elipsă, va avea o axă constantă în direcțiune și mărime $Mm = ON$, pe când cea-l-altă axă, continuată în secțiunea principală considerată, va avea o lungime variabilă, a cărei mărime va depinde de poziția lui ON . Vom avea deci iar două unde, din care: una ordinară polarizată în planul secțiunii principale, care conține normala și se propagă cu o viteză constantă; iar cea-l-altă undă extraordinară, care se propagă cu o viteză care variază între două limite, a căror valori sunt invers proporționale cu axele secțiunii principale considerate, polarizată perpendicular pe această secțiune principală. -

Dacă acum, pe fiecare direcțiune ON ducem lungimi invers proporționale cu axele elipsei corespundente, vom obține suprafața vitezelor normale, care va avea două nape și va fi simetrică în raport cu trei planuri principale care sunt

acele ale elipsoidului. - Am văzut care este ecuația acestei suprafețe și că, pentru a ne da samă de forma sa, este de ajuns de a căuta intersecțiile sale cu cele trei planuri principale. -

1/ Să considerăm secțiunea prin planul $\underline{N_g}$



$\underline{n_p}$; ducând pe fiecare direcțiune distanțe invers proporționale cu axele elipsei corespondente, vom obține un cerc de rază:

$$V_m = \frac{1}{n_m} \text{ și o ovală având ca axe: } V_p = \frac{1}{n_g}$$

și $V_g = \frac{1}{n_p}$. - Aceste două curbe se tăie în patru puncte, prin care trec axele optice AA' și $A'A'$, după care viteza de propagare este: $V_m = \frac{1}{n_m}$. -

2/. Dacă considerăm secțiunea prin planul $\underline{n_g}$, $\underline{n_m}$, elipsele corespondente au ca axă comună pe $\underline{n_p}$. Vom avea: un cerc de rază $V_g = \frac{1}{n_p}$ și ovala a cărei axe sunt: $V_m = \frac{1}{n_m}$ și $V_p = \frac{1}{n_g}$. -

3/. Pentru secțiunea prin planul $M_m M_p$ elipsele corespondente

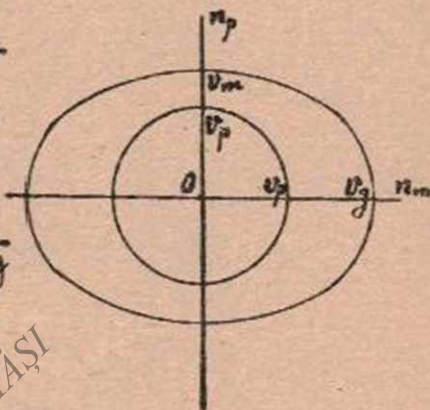
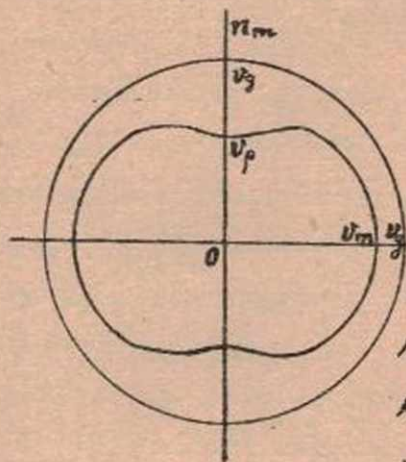
au axa comu-

nă M_g ; obți-

nem în acest

caz: un cerc de rază $V_p = \frac{1}{n_g}$ și o ovală a cărei axe sunt:

$$V_m = \frac{1}{n_m} \text{ și } V_p = \frac{1}{n_p}.$$



Dacă considerăm împreună cele trei secțiuni, vedem că: suprafața vitezelor normale

este compusă din două

nape din care: una in-

ternă va avea patru puncte

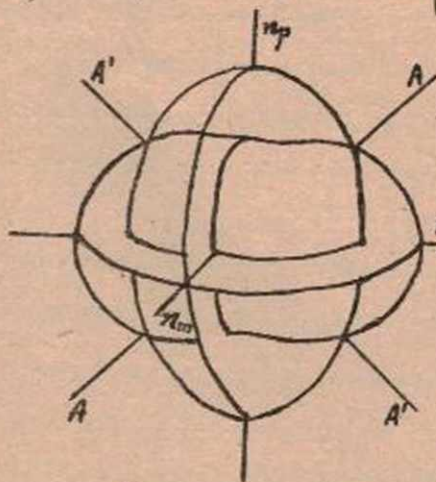
care iesă în relief, cores-

punzătoare celor patru puncte

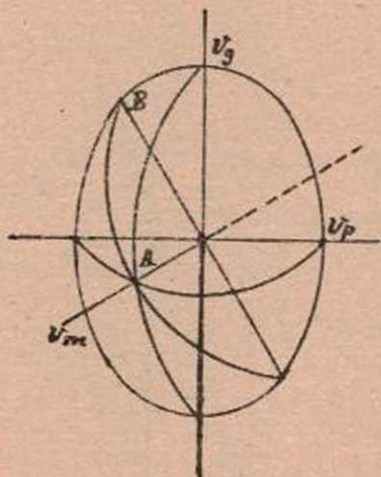
ombilicale ale napei

externe. - Prin aceste 4

puncte comune trec axele optice. -



În cristalele biaxe, elipsoidul direct are de

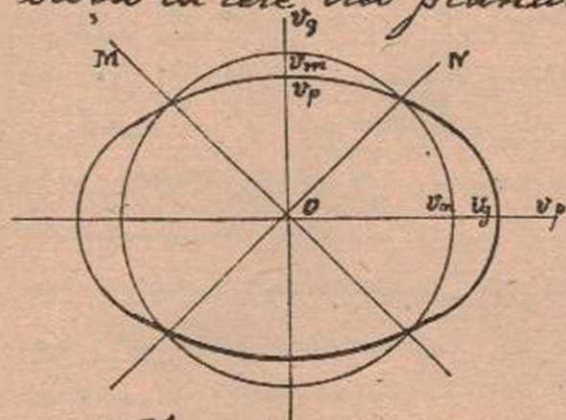


asemeni cele trei axe ne-egale: v_g , v_m , v_p și dă două secțiuni ciclice, având ca raze pe v_m a căror normale, continuate în planul $v_g v_p$, sunt axe optice. Aceste axe nu coincid cu acele pe care le-am găsit la suprafața vitezelor, și

pentru a se deosebi, au fost numite: axe de refracțiune conică internă. Dacă considerăm o direcțiune oarecare Oh , după această direcțiune se pot propaga două raze a căror viteze de propagare sunt proportionale cu semi-axele OA și OB , a elipsei corespondente acestei direcțiuni, și a căror valoare depinde de poziția lui Oh . — —

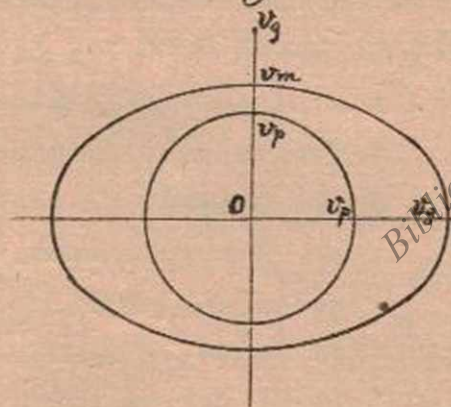
Dacă ducem pe direcțiunile de propagare vitezele celor două raze, care sunt proportionale cu lungimile axelor elipselor corespondente, vom obține suprafața de undă. Această suprafață va avea de asemenea două nape și va da curbe diverse, ca inter-

secțiune cu cele trei planuri principale.

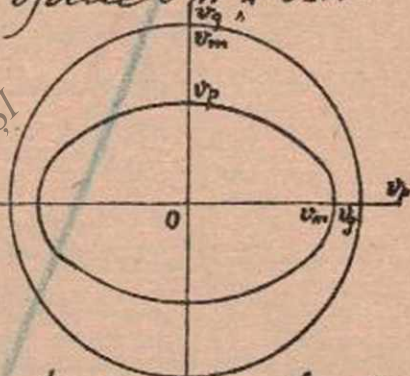


1). Planul $v_g v_p$ are da ca secțiune: un cerc de rază v_m și o elipsă a cărei axe sunt: v_g și v_p . Ele se taie în patru puncte prin care trec axele optice OM și ON.

2). Planul $v_g v_m$ da un cerc



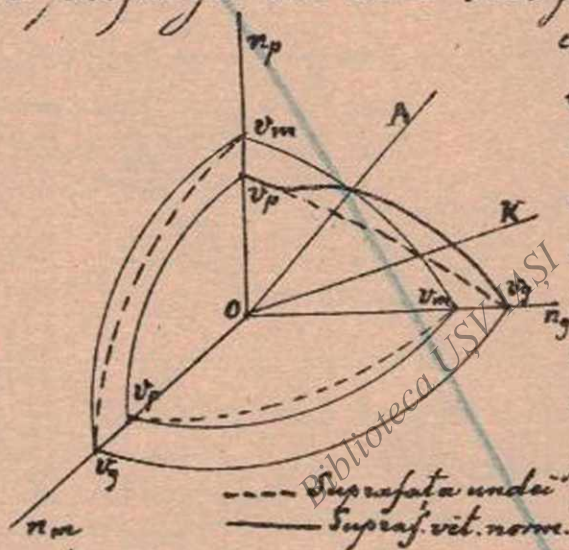
de rază v_p și o elipsă a cărei axe sunt: v_g și v_m . Aceste două curbe sunt concentrice și nu se taie.



3). În planul $v_p v_m$ vom avea ca secțiune: un cerc de rază v_g și o elipsă a cărei axe sunt: v_m și v_p . Suprafața de undă va avea deci două năpe: una internă, alta externă care se ating în patru puncte comune prin care trec axele optice.

3). În planul $v_p v_m$ vom avea ca secțiune: un cerc de rază v_g și o elipsă a cărei axe sunt: v_m și v_p . Suprafața de undă va avea deci două năpe: una internă, alta externă care se ating în patru puncte comune prin care trec axele optice.

Dacă comparăm acum suprafața de undă cu suprafața vitezelor, constatăm ca ele au aceleași axe, fiind ca elipsoidul direct și invers au axele reciproce. Razele ordinare se propagă în cele trei planuri principale



cu aceeași viteză ca undele plane, pe când razele extraordinare nu coincid cu normala la unda lor plană. Curbele atinse în secțiunile principale de unde plane sunt ovale, pe când

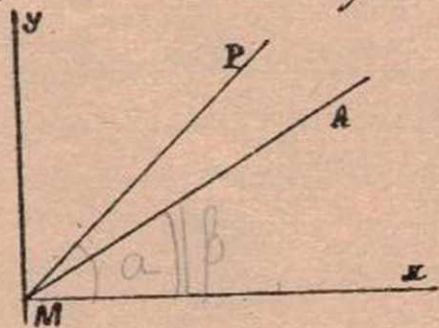
cele atinse de raze sunt elipse, din cauză că, în suprafața vitezelor normale ovala este reciprocă elipsei de secțiune principală în elipsoidul invers, pe când în suprafața de undă, curba obținută este însuși elipsa. - De asemenea în planul axelor optice, intersecția ovalului cu cercul nu coincide cu aceea a cercului cu elipsa. Deci: punctele ombilicale a

suprafaței vitezelor nu se confundă cu acele a suprafeței de undă și prin urmare axele optice nu se confundă cu axele de refracțiune conică internă.

Capitol Polarizarea cromatică.

Sub acest titlu vom studia toate fenomenele de colorație care au loc, când se interpo-
ne între două prize birrefringente, pola-
rizor și analizor, o lamă subțire cu fețe
paralele, aparținând unei substanțe bire-
fringente.

Să studiem mai întâi teoria acestor
fenomene. - Să presupunem că operăm în



lumina monocromatică. - Fie o undă pola-
rizată plană parale-
lă cu planul figurii,
care reprezintă supra-
fața unei lame sub-
țirii cristaline. Fie
MP direcțiunea de

vibrațiune a acestei unde incidente, făcând
un unghi α cu Mx . Însă după ce
stim deja, lama cristalină nu poate lăsa

Să se propage fără alterație de cât vibrațiunile după două direcțiuni dreptunghiulare pe care le însemnăm cu M_x și M_y . Viteza de vibrațiune a undei incidente fiind dată prin:

$$v = a \sin 2\pi \frac{t}{T}$$

Știm că o putem considera ca rezultatul suprapunerii a două vibrațiuni dirijate după M_x și M_y , a căror amplitudine sunt date prin relațiile:

$$a_1 = a \cos \alpha \quad \text{și} \quad a_2 = a \sin \alpha.$$

și vitezele vibrațiunilor prin:

$$v_1 = a_1 \sin 2\pi \frac{t}{T} \quad \text{și} \quad v_2 = a_2 \sin 2\pi \frac{t}{T}$$

Fiind că undele dirijate după M_x și M_y se propaga cu viteze deosebite, ele vor pune de asemenea timpuri deosebite pentru a traversa lăma cristalină: fie θ_1 și θ_2 aceste timpuri. La esirea din lăma, în timpul t , cele două vibrațiuni vor fi aceleasi ca la intrare în timpurile: $(t - \theta_1)$ și $(t - \theta_2)$. Vitezele corespunzătoare vor fi:

$$v'_1 = a_1 \sin 2\pi \frac{t - \theta_1}{T} \quad \text{și} \quad v'_2 = a_2 \sin 2\pi \frac{t - \theta_2}{T}$$

Dată numim: $t - \theta_1 = t'$ de unde: $t = t' + \theta_1$

atunci: $t - \theta_2 = (t' + \theta_1) - \theta_2 = t' - (\theta_2 - \theta_1)$

și prin urmare:

$$v'_1 = a_1 \sin 2\pi \frac{t'}{T} \quad \text{și} \quad v'_2 = a_2 \sin 2\pi \left[\frac{t'}{T} - \frac{\theta_2 - \theta_1}{T} \right]$$

Deci: vibrațiunile după Mx și My au, la esirea lor din lamă o diferență de fază de:

$$2\pi \frac{\theta_2 - \theta_1}{T}$$

Pentru prescurtare să punem: $\frac{\theta_2 - \theta_1}{T} = \tau \dots (1)$
Atunci vom avea:

$$v_2' = a_2 \sin 2\pi \left(\frac{t'}{T} - \tau \right)$$

Însă noi știm că: două vibrațiuni dreptunghiulare nu pot interfera: pentru a le face paralele, să facem să intervină un analizor, care nu lasă să treacă de cât vibrațiunile după MA , care face cu Mx un unghi β . Atunci cele două vibrațiuni ce iesă din lama cristalină dau fiecare o componentă după MA , a căror amplitudină sunt:

$$a_1' = a_1 \cos \beta = a \cos \alpha \cos \beta \dots (2)$$

$$a_2' = a_2 \sin \beta = a \sin \alpha \sin \beta \dots (3)$$

Tar vitezele sunt:

$$v_1'' = a_1' \sin 2\pi \frac{t'}{T} \quad \text{și}$$

$$v_2'' = a_2' \sin 2\pi \left(\frac{t'}{T} - \tau \right)$$

Aceste două componente fiind paralele vor pute fi compuse și vor da o rezultantă

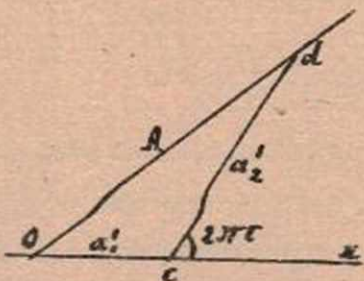
$$v'' = v_1'' + v_2''$$

Înlocuind valorile lui v_1'' și v_2'' , și însumând cu A amplitudinea rezultantă,

vom avea:

$$v'' = A \sin 2\pi \left(\frac{t'}{T} - \varphi \right)$$

Pentru a avea valoarea lui A , vom proceda după regula lui Fresnel:



Pe o dreaptă Ox , luăm o lungime $Oc = a_1'$, și prin punctul c ducem dreapta $cd = a_2'$, care face unghiul: $\angle c = 2\pi t$.

Atunci dreapta Od reprezintă valoarea lui A și, din triunghiul Ocd , deducem relațiunea:

$$Od^2 = A^2 = a_1'^2 + a_2'^2 + 2a_1'a_2' \cos 2\pi t.$$

Pentru a face în al doilea membru un pătrat perfect, adăugăm și scădem: $2a_1'a_2'$ și avem:

$$A^2 = (a_1' + a_2')^2 - 2a_1'a_2' + 2a_1'a_2' \cos 2\pi t \quad \text{sau:}$$

$$A^2 = (a_1' + a_2')^2 - 2a_1'a_2'(1 - \cos 2\pi t).$$

Inșă:

$$1 - \cos 2\pi t = 2 \sin^2 \pi t$$

Deci:

$$A^2 = (a_1' + a_2')^2 - 4a_1'a_2' \sin^2 \pi t \dots (4)$$

și dacă înlocuim valorile lui a_1' și a_2' date de (2) și (3) vom avea:

$$A^2 = a^2 (\cos \alpha \cos \beta + \sin \alpha \sin \beta)^2 - 4a^2 \cos \alpha \cos \beta \sin \alpha \sin \beta \sin^2 \pi t.$$

Sau:

$$A^2 = a^2 [\cos^2(\beta - \alpha) - \sin 2\alpha \sin 2\beta \sin^2 \pi t]$$

Dacă însemnăm cu I intensitatea vibrației incidente și cu I' intensitatea vibrației

care iesă după MA, știind că intensitățile sunt proporționale cu pătratele amplitudinilor, vom pute scrie:

$$\frac{I'}{I} = \frac{A^2}{\alpha^2} = \frac{\alpha^2 (\cos^2(\beta - \alpha) - \sin 2\alpha \sin 2\beta \sin^2 \pi t)}{\alpha^2} \quad \text{sau:}$$

$$\frac{I'}{I} = \cos^2(\beta - \alpha) - \sin 2\alpha \sin 2\beta \sin^2 \pi t \dots (5)$$

Pentru a pute face discutia acestei formule trebuie să înlocuim valorile lui t în funcție de grosimea e a lamei cristaline. Dacă v_x și v_y sunt vitezele de propagare a vibrațiilor după M_x și M_y vom pute scrie:

$$\theta_1 = \frac{e}{v_x} \quad \text{și} \quad \theta_2 = \frac{e}{v_y}$$

Și fiind că: $t = \frac{\theta_2 - \theta_1}{T}$, urmează că:

$$t = \frac{1}{T} \left(\frac{e}{v_y} - \frac{e}{v_x} \right) = \frac{e}{T} \left(\frac{1}{v_y} - \frac{1}{v_x} \right)$$

Dacă V reprezintă viteza de propagare a vibrațiilor în aer, înmulțind și împărțind al doilea membru prin V , vom ave:

$$t = \frac{e}{VT} \left(\frac{V}{v_y} - \frac{V}{v_x} \right)$$

Și fiind că: $VT = \lambda$ corespunzătoare luminii monocromatice în care operăm, și

$$\frac{V}{v_y} = n_y \quad \text{și} \quad \frac{V}{v_x} = n_x$$

n_x și n_y fiind indicii de refracție cores-

punctelor direcțiunelor M_x și M_y , urmează că:

$$\bar{r} = \frac{e}{R} (n_y - n_x) \dots \dots \dots (6)$$

Si acum când avem valoarea lui $\bar{r}$ în funcțiune de: e, R, n_y și n_x , să discutăm formula (5). —

Observăm că: al doilea membru al formulei, se compune din 2 termeni: cel întâi care este: $\cos^2(\beta - \alpha)$ și care este independent de R , și al doilea: $\sin 2\alpha \sin 2\beta \sin^2 \pi \bar{r}$, care depinde de R prin valoarea lui $\bar{r}$. —

a). Să presupunem că, al doilea termen este nul, pentru toate valorile lui $\bar{r}$, adică avem: $\sin 2\alpha = 0$ și deci și $\sin 2\beta = 0$.

Atunci formula (5) devine:

$$\frac{I'}{I} = \cos^2(\beta - \alpha) \dots \dots \dots (5).$$

Această formulă ne arată mai întâi că, raportul $\frac{I'}{I}$ este independent de R . Atunci dacă operăm în lumină albă, lumina care iese e tot albă, însă mai mult sau mai puțin intensă, după valoarea lui $\cos^2(\beta - \alpha)$, adică, poate varia de la alb la gri la negru. Pentru aceasta s'a admis a se numi acest termen: $\cos^2(\beta - \alpha)$: termenul incolor. — — —

6). Presupunem acum ca punctul termen este

$$\text{mul. Vom avea: } \cos^2(\beta - \alpha) = 0 \text{ deci: } (\beta - \alpha) = \pm \frac{\pi}{2} \text{ si}$$

$$\text{deci: } 2\beta = 2\alpha \pm \pi \text{ si prin urmare:}$$

$$\sin 2\beta = -\sin 2\alpha$$

Atunci formula (5) devine:

$$\frac{I}{I'} = \sin^2 2\alpha \sin^2 \pi$$

Deci: valoarea lui I' depinde de I si prin ur-

ma: daca operam in lumina alba, fiind

ca ea e compusa din diferite culori simple,

pentru care si vanarea, lumina care va da in

sa mai fi alba. In adevar: putem sa presu-

punem ca grosimea lamii este asa incat, sa-

portul care da valoarea lui I , pentru o ra-

diatiune care care, rosie, violeta etc este in

numar intreg: 2, 3, ... Atunci avem:

$$\sin^2 \pi = \sin^2 2\pi = \sin^2 3\pi = \dots = 0$$

Deci: intensitatea luminelor: rosie, violeta

etc. emergente, sunt nule. Insa, pentru una

din radiatiunile intermediare intre $2\frac{1}{2}$ si

violet. I ia valori cuprinse intre $2\frac{1}{2}$ si

si atunci aceasta culoare va sa zice,

intensitatea maximum: lamii afare

deci colorata. Pentru acest motiv, al der-

lea termen: $\sin 2\alpha \sin 2\beta \sin^2 \pi$, de

numeste: termen colorat. — —

c). Dacă nici unul din termeni nu este nul, atunci vom avea o intensitate compusă din doi termeni, din care, unul colorat și altul incolor, ciia ce înseamnă că lumina va esi tot colorată, însă intensitatea sa va fi mai mică de cât în cazul cand termenul incolor este nul. — —

— Să examinăm acum ce se întâmplă când întorcem sau polarizorul sau analizorul, lasând fixă lama și cea-l. altă prismă. Trebuie mai întâi să remarcăm că: dacă întorcem analizorul de 90° unghiul β ce face secțiunea sa principală cu Mx devine: $\beta' = \beta + \frac{\pi}{2}$

Atunci lumina emergentă are o altă intensitate I' , a cărei valoare este:

$$\frac{I'}{I} = \cos^2(\beta' - \alpha) - \sin 2\alpha \sin 2\beta' \sin^2 \pi \epsilon \quad \text{sau}$$

$$\frac{I'}{I} = \sin^2(\beta - \alpha) + \sin 2\alpha \sin 2\beta \sin^2 \pi \epsilon \dots (7).$$

— Dacă adunăm egalitățile (5) și (7) avem:

$$\frac{I + I'}{I} = 1 \quad \text{Deci: } I + I' = I. -$$

Deci: intensitățile corespunzătoare la două pozițiuni ale analizorului, diferite de 90° sunt astfel înc. că: suma lor este egală cu inten-

sitatea luminei incidente. - Asa: pentru cazul luminei albe, culorile corespondente acestor pozitii a analizorului sunt astfel ca: prin suprapunerea lor, dau lumina alba, deci: sunt culori complementare. Asa: pentru o culoare rosie, dupa o rotatiune de 90° avem culoarea complementara verde, pentru albastru avem galbăn etc. -

Este evident ca, daca facem sa se intoarca polarizorul sau analizorul, valorile lui α sau β variaza. - In aceste variatii, valorile lor pot fi asa ca sa avem:

$$\sin 2\alpha = 0 \quad \text{sau} \quad \sin 2\beta = 0.$$

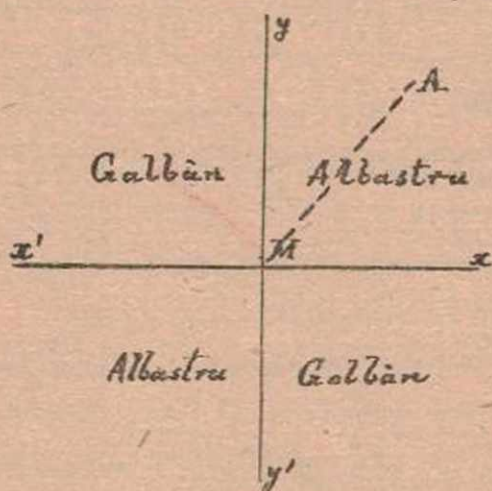
Sa presupunem mai intai: $\sin 2\alpha = 0$. Cand α variaza, adica facem sa se intoarca polarizorul, termenul colorat trecand prin zero. Schimba de semn. Daca in acelasi timp $\sin 2\beta$ nu se anuleaza, termenul colorat schimba de semn; deci prin variatia lui α mai intai coloratia slăbește si cand $\sin 2\alpha = 0$ ea devine incolora si avem:

$$\frac{I'}{I} = \cos^2(\beta - \alpha).$$

In urma α variind mai departe, apare culoarea complementara. — —

2). Sa facem sa se invarta analizorul.

Atunci β variază și α rămâne constant. -



Pentru $\sin 2\beta = 0$ termenul colorat se anulează: însă aceasta corespunde la 4 valori a lui β :

$$0, \frac{\pi}{2}, \pi, \frac{3\pi}{2}$$

pentru care imaginea nu este colorată. Deci, când secțiunea principală a analizorului co-

incide cu una din cele două direcțiuni dreptunghiulare de vibrațiune a lamei, imaginea este incoloră. Dar dacă $\sin 2\alpha$ nu este nul, atunci lumina este colorată, și dacă înturnăm analizorul în acelaș sens, pentru o rotație de 90° avem culoarea complementară. Așa: Să presupunem că, pentru poziția MA lama este colorată în albastru, când ea ajunge în MA' , lama va fi colorată în galbăn, complementară albastrului. -

β). Dacă înturnăm polarizorul, atunci α variază și β rămâne constant; însă formula (5) este simetrică în raport cu α și β ; deci vom avea aceleași fenomene. -

g) Dacă înturnăm lama, polarizorul și analizorul rămânând fixi, atunci constatăm faptele următoare:

Dacă secțiunile principale ale polarizorului și a analizorului nu sunt nici paralele nici perpendiculare, adică: $(\beta - \alpha)$ nu este nici nul nici $\frac{\pi}{2}$, valoarea lui $(\beta - \alpha)$ rămâne constantă și termenul incolor nu se schimbă. În acest caz: $\sin 2\alpha$ și $\sin 2\beta$ nu pot să se anuleze simultan. Dacă: $\sin 2\alpha = 0$, ceea ce are loc pentru:

$$\alpha = 0, \frac{\pi}{2}, \pi, \frac{3\pi}{2}$$

termenul incolor se anulează, schimbând de semn. — Dacă $\sin 2\beta = 0$, pentru aceleași valori a lui β , termenul colorat se anulează schimbând de semn. Deci în total sunt 8 pozițiuni pentru care lama este incoloră, iar între aceste pozițiuni lama e colorată și culorile sunt complementare.

Pentru cazuri particulare avem:

1) $\alpha = \beta$ care corespunde cazului când nicolii sunt paraleli; avem atunci numai 4 pozițiuni pentru care lamina este albă, iar între aceste pozițiuni culoarea este aceeași. Avem atunci:

$$\frac{I'}{I} = 1 - \sin^2 2\alpha \sin^2 \pi t$$

Deci termenul colorat nu schimbă de semn când $\sin 2\alpha$ se anulează. Si:

2) $\beta = \alpha + \frac{\pi}{2}$, când nicoli sunt în cruce; vom avea iarăși 4 pozițiuni pentru care lumina este albă; însă de astă dată, între aceste 4 pozițiuni, culoarea este complementară celei precedente. Formula (5) devine:

$$\frac{I'}{I} = \sin^2 2\alpha \sin^2 \pi t.$$

Când $\sin 2\alpha = 0$ obținem culoarea neagră, deci obscuritate. —

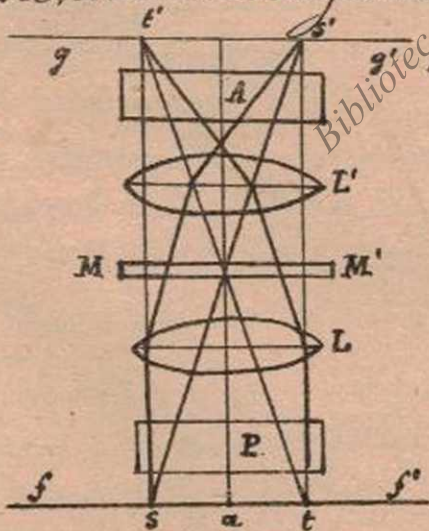
Pentru a avea culoarea cea mai vie, trebuie mai întâi ca în formula (5) termenul incolor să fie nul, ceea ce are loc când avem: $\beta - \alpha = \frac{\pi}{2}$, adică atunci când polarizorul și analizorul sunt în cruce. Atunci:

$$\frac{I'}{I} = \sin^2 2\alpha \sin^2 \pi t$$

Mai trebuie apoi să avem maximum intensității, ceea ce are loc pentru: $\sin^2 2\alpha = 1$ deci pentru: $\alpha = \frac{\pi}{4}$ sau $\alpha = \frac{3\pi}{4}$. Deci: secțiunea principală a lamei trebuie să aibă o înclinare de 45° față de secțiunea principală a polarizorului sau analizorului.

Polarizarea Cromatică în lumină convergentă.

Fenomenele pe care le am analizat până acum pot fi studiate în două moduri: în lumină paralelă, care, după cum am văzut în cele precedente, ne dau fenomenele de colorație uniformă a lamelor cristaline, așa după cum rezultă din analiza făcută formulei (5); și în lumină convergentă, adică fenomenele care rezultă când lamela cristalină e străbătută de raze care nu mai sunt paralele, dar convergente. În acest caz se obțin fenomene particulare a



căror explicare se face tot cu ajutorul formulei (5). Să examinăm mai întâi mersul razelor în acest caz. Fie o lamă cristalină MM' între un polarizor P și un analizor A . Să interpunem între lamela și fiecare priză câte o lentilă convergentă. Fie L și L' aceste lentile, iar gg și gg' planurile lor focale. Să considerăm punc-

tut S în planul focal al lentilei L ; el trimite
rare care, după ce au străbătut lentila L și la-
mela cristalină, sunt primite de lentila L' , care
le concentrează în punctul S' , în planul focal
 gg' . Fiind că aceste rare au trecut prin I și A ,
în S' vor avea lumină colorată. Dacă consi-
derăm un alt punct t , este evident că, rare-
le pe care le va trimite, vor traversa lama
sub o altă incidență, așa că, imaginea sa t'
va fi colorată altfel decât S' ; deci în pla-
nul focal gg' nu vom avea o colorație unifor-
mă, dar figuri colorate. Pentru examenul
acelor fenomene ne servim de aparata speci-
ale, de care ne vom ocupa mai târziu. Pentru
moment, să ne ocupăm cu teoria acestor fe-
nomene.

După ceia ce am văzut mai înainte, pentru
fiecare direcție a razelor, intensitatea luminoasă
și a imaginii, este dată prin formula (5):

$$\frac{I'}{I} = \cos^2(\beta - \alpha) - \sin 2\alpha \sin 2\beta \sin^2 \pi t.$$

Toate punctele pentru care t este același, vor
avea aceeași colorație, câtă vreme produsul
 $\sin 2\alpha \sin 2\beta$ conservă același semn; după ce
au trecut prin valoarea 0, el schimbă
de semn, deci colorarea va trece la cea

complimentară. Liniele corespondente aceleiași valori a lui ϵ vor fi colorate cu o culoare oarecare sau complimentara sa: ele se numesc: linii isocromatice. --

Liniele corespunzătoare lui $\sin 2\alpha = 0$ sau $\sin 2\beta = 0$, pentru care produsul: $\sin 2\alpha \sin 2\beta = 0$ sunt incolore și se cheamă: linii neutre.

Forma liniilor isocromatice poate să se deducă prin Studiul Suprafeței isocromatice a lui Bertin. --

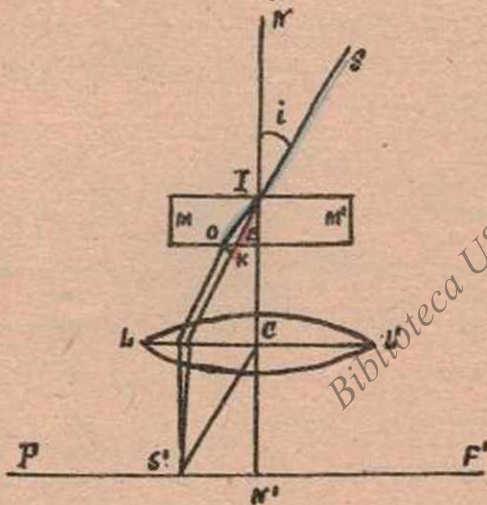
Să considerăm un cristal și în interior un punct O prin care trec razele vectorii astfel că, între două raze luminoase cu vibrațiuni dreptunghiulare, care se propagă după această direcțiune, se stabilește o diferență de drum δ , care este aceeași pentru orice direcțiune. Locul geometric al razelor vectorii astfel definite este o suprafață pe care Bertin a numit-o: Suprafața isocromatică. --

Este evident că, cele două raze care se propagă în aceste direcțiuni vor avea viteze de propagare diferite: Să le însemnăm cu V_1 și V_2 . Dacă T este durata unei vibrațiuni, trebuie să

avem:
$$\delta = \frac{\delta}{T} \left(\frac{1}{V_2} - \frac{1}{V_1} \right) \text{ sau:}$$

$$\delta.T = f \left(\frac{1}{v_2} - \frac{1}{v_1} \right) \dots \dots \dots (1) \dots$$

Raza vectorie ρ este determinată prin unghiurile α, β, γ pe care le face cu axele, și fiind că: $\frac{1}{v_2} - \frac{1}{v_1}$ depinde de α, β și γ , rezultă că: ecuațiunea (1) poate fi considerată ca ecuația polară a suprafeței isocromatice.



Am văzut că, dacă considerăm o lamă cristalină MM' în fața unei lentile L, L' pe care o presupunem că este obiectivul unui microscop, a cărui plan focal e F, F' și dacă NN' reprezintă axa optică a acestui obiectiv, atunci o rază SI care cade pe fața lamei în punctul

I , unde o străbate axa, această rază fiind polarizată, intrând în lamela cristalină, se va desface în două raze: IO și IE , care, după ce au străbătut lama, ies paralele între ele, și cu SI , și sunt primite de obiectiv, care le reunește în punctul S' în planul focal, unde vine și raza CS' paralelă cu IS . - Știm că, razele străbătând lama, capătă

o diferență de drum, care nu mai variază plecând de la planul OK , perpendicular pe direcția lor la esirea din lamă. - Această diferență de drum, care este δ al nostru, poate fi reprezentat prin:

$$\delta = \frac{1}{T} \left[\frac{IE}{V_2} + \frac{EK}{V} - \frac{IO}{V_1} \right] \dots (2)$$

în care: V, V_1, V_2 reprezintă vitezele de propagare în aer și după IO și IE . Însa din cauza micii diferențe între IO și IE , putem confunda direcțiunile lor și prin urmare să neglijăm pe EK , însemnând cu l lungimea comună IO și IE . Atunci relațiunea (2) devine egală cu (1). Deci, punctul I este centrul unei suprafețe isocromatice, corespunzătoare diferenței de drum δ , așa că, dacă considerăm această suprafață la esirea din lamă, este evident că ea o va tăia după o linie care se va bucura de proprietatea ca, toate direcțiunile care trec prin I și ajung la această linie, vor avea aceeași diferență de drum. -

Dacă considerăm unghiuri de incidență foarte mici, vom pute scrie:

$$\frac{l}{r} = n$$

și atunci aceleași raze vor descrie în planul

focal FP' a obiectivului o suprafață izocromatică, a cărei puncte precum S' , vor avea aceeași diferență de drum δ și vor da cu acest plan ca intersecție o linie analoagă cu cea determinată pe fața de esire a lamelei. Deci, dacă considerăm suprafețele izocromatice a căror centru este I , și pentru care valorile lui δ variază, vom putea să ne facem o idee de forma generală a acestor linii.

Considerăm deci formula (1) în care vom înlocui $\frac{1}{V_2} - \frac{1}{V_1}$ în funcțiune de α, β și γ , și după ce vom face reducerile necesare, vom face discuțiunea formulei ce va rezulta. Trebuie dar să găsim valorile lui V_1 și V_2 , care sunt razele vectorii corespundente celor două nape a Suprafeței undei. -

Să considerăm atunci formula lui Fresnel:

$$r^6(a^2x^2 + b^2y^2 + c^2z^2) - r^4[(b^2 + c^2)a^2x^2 + (c^2 + a^2)b^2y^2 + (a^2 + b^2)c^2z^2] + a^2b^2c^2r^2 = 0$$

în care înlocuim valorile:

$$x^2 = r^2 \cos^2 \alpha, \quad y^2 = r^2 \cos^2 \beta, \quad z^2 = r^2 \cos^2 \gamma.$$

și după ce luăm pe r^2 în factor comun, avem:

$$r^6(a^2 \cos^2 \alpha + b^2 \cos^2 \beta + c^2 \cos^2 \gamma) - r^4[(b^2 + c^2)a^2 \cos^2 \alpha + (c^2 + a^2)b^2 \cos^2 \beta + (a^2 + b^2)c^2 \cos^2 \gamma] + r^2(a^2 + b^2 + c^2) = 0.$$

Împărțind prin r^6 vom avea:

$$a^2 \cos^2 \alpha + b^2 \cos^2 \beta + c^2 \cos^2 \gamma - \frac{1}{r^2} \left[(b^2 + c^2) a^2 \cos^2 \alpha + (c^2 + a^2) b^2 \cos^2 \beta + (a^2 + b^2) c^2 \cos^2 \gamma \right] + \frac{1}{r^4} (a^2 + b^2 + c^2) = 0 \dots (3).$$

Avem o ecuație în $\frac{1}{r^2}$ de al doilea grad, a cărei rădăcini sunt: $\frac{1}{V_1^2}$ și $\frac{1}{V_2^2}$, și atunci putem să scriem:

1) Că: suma rădăcinilor este egală cu coeficientul necunoscutei la primul grad, schimbat de semn:

$$\frac{1}{V_1^2} + \frac{1}{V_2^2} = (b^2 + c^2) a^2 \cos^2 \alpha + (c^2 + a^2) b^2 \cos^2 \beta + (a^2 + b^2) c^2 \cos^2 \gamma$$

care se poate scrie încă, împărțind al doilea membru prin: $a^2 b^2 c^2$:

$$\frac{1}{V_1^2} + \frac{1}{V_2^2} = \frac{b^2 + c^2}{b^2 c^2} \cos^2 \alpha + \frac{c^2 + a^2}{a^2 c^2} \cos^2 \beta + \frac{a^2 + b^2}{a^2 b^2} \cos^2 \gamma \dots (4).$$

2). Cu produsul rădăcinilor este egal cu termenul independent de necunoscută:

$$\frac{1}{V_1^2} \cdot \frac{1}{V_2^2} = a^2 \cos^2 \alpha + b^2 \cos^2 \beta + c^2 \cos^2 \gamma$$

Împărțind și aici al doilea membru prin: $a^2 b^2 c^2$ vom avea:

$$\frac{1}{V_1^2} \cdot \frac{1}{V_2^2} = \frac{\cos^2 \alpha}{b^2 c^2} + \frac{\cos^2 \beta}{a^2 c^2} + \frac{\cos^2 \gamma}{a^2 b^2} \dots (5).$$

Să considerăm acum ecuația (1) sub forma:

$$\frac{\delta T}{\rho} = \left(\frac{1}{V_1} - \frac{1}{V_2} \right)$$

și să ridicăm la patrat: vom avea:

$$\frac{\delta^2 T^2}{\rho^2} = \frac{1}{V_1^2} + \frac{1}{V_2^2} - \frac{2}{V_1 V_2} \text{ sau:}$$

$$\frac{1}{V_1^2} + \frac{1}{V_2^2} - \frac{\delta^2 T^2}{\rho^2} = \frac{2}{V_1 V_2}$$

Rădicând încă odată la pătrat avem:

$$\left(\frac{1}{V_1^2} + \frac{1}{V_2^2} - \frac{\delta^2 T^2}{\rho^2} \right)^2 = \frac{4}{V_1^2 V_2^2}$$

Să înlocuim în această ecuație valorile lui:

$\frac{1}{V_1^2} + \frac{1}{V_2^2}$ și $\frac{1}{V_1^2 V_2^2}$ găsite în (4) și (5) și înmulțind cu ρ^4 obținem:

$$\left(\frac{b^2+c^2}{b^2c^2} \rho^2 \cos^2 \alpha + \frac{c^2+a^2}{a^2c^2} \rho^2 \cos^2 \beta + \frac{a^2+b^2}{a^2b^2} \rho^2 \cos^2 \gamma - \delta^2 T^2 \right)^2 - 4 \rho^2 \left(\frac{\rho^2 \cos^2 \alpha}{b^2c^2} + \frac{\rho^2 \cos^2 \beta}{a^2c^2} + \frac{\rho^2 \cos^2 \gamma}{a^2b^2} \right) = 0 \quad (A)$$

Înlocuind: $x^2 = \rho^2 \cos^2 \alpha$, $y^2 = \rho^2 \cos^2 \beta$, $z^2 = \rho^2 \cos^2 \gamma$ vom avea:

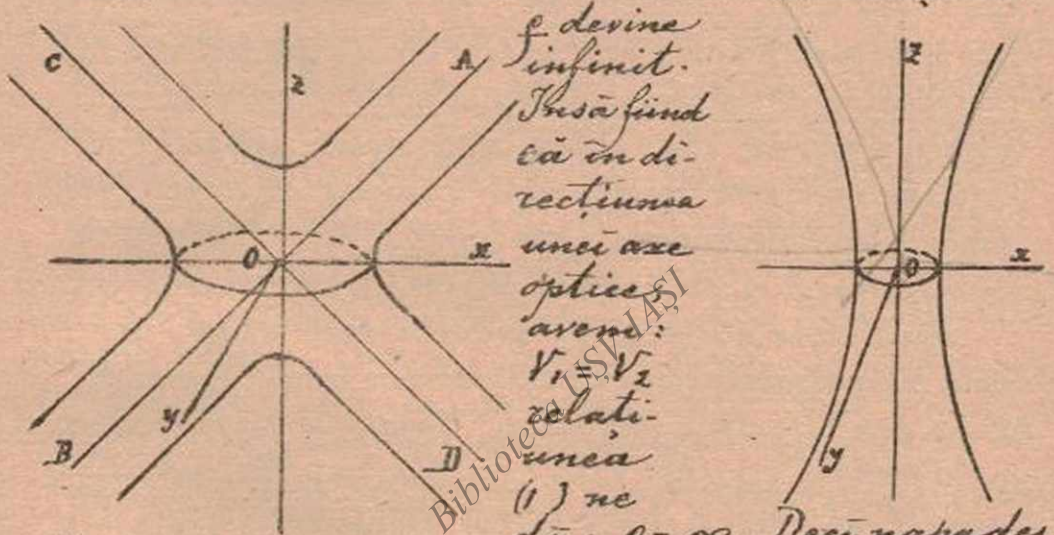
$$\left[\frac{b^2+c^2}{b^2c^2} x^2 + \frac{c^2+a^2}{a^2c^2} y^2 + \frac{a^2+b^2}{a^2b^2} z^2 - \delta^2 T^2 \right]^2 - 4 \left(x^2 + y^2 + z^2 \right) \left[\frac{x^2}{b^2c^2} + \frac{y^2}{a^2c^2} + \frac{z^2}{a^2b^2} \right] = 0 \quad (B)$$

Ecuația (A) reprezintă ecuația suprafeței isocromatice în coordonate polare, pe când (B) în coordonate rectilinii, în care axele de coordonate sunt axele de elasticitate a cristalului. —

Să discutăm acum formula (A).

Suprafața care corespunde acestei formule, apare ca având 2 nape, căci sunt două valori a lui ρ^2 care satisfac ecuația (A). Însă suprafața isocromatică corespunzătoare ecuației (1), care este suprafața reală, nu este decât

cu o singură năpă; deci calculele au introdus o soluție parafită. Pentru a vedea care este năpă pe care trebuie să o considerăm, observăm că formula (A) dă două năpe, din care: una închisă și alta deschisă în direcțiunea axelor optice; ceea ce înseamnă că: în aceste direcțiuni



chisă este singura care reprezintă suprafața isocromatică. -

Pentru cristalele biaxe avem: $a > b > c$, iar suprafața isocromatică este reprezentată prin prima din figurile precedente: ramurile infinite sunt asimptote cilindrelor a căror generatrice sunt paralele cu axele optice. -

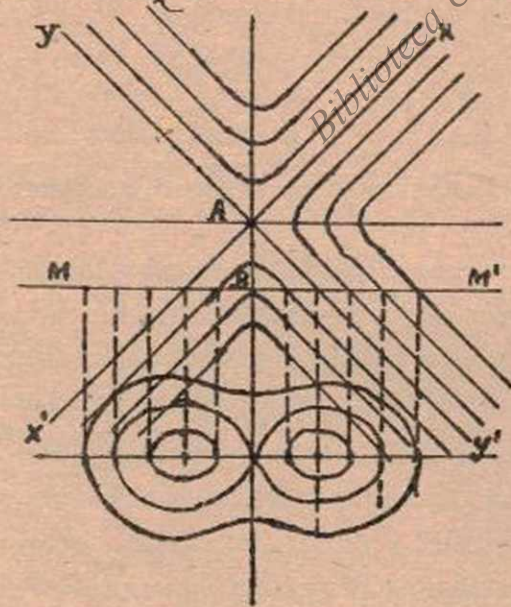
Pentru cristalele uniaxe avem: $a = b \neq c$. Suprafața isocromatică e reprezentată prin cea - l - altă figură: ea este o suprafață de

revoluție în jurul axei cristalului, a cărui secțiune prin un plan trecând prin centru este o hiperbolă.

Ecuația (1) ne indică următoarele proprietăți a suprafeței izocromatice:

Pentru valorile lui δ variabile, avem valori variabile pentru ρ : deci: suprafețele izocromatice corespunzătoare sunt homotetice și homocontrice. Cu cât δ este mai mare cu atât suprafața este mai îndepărtată de centru; când δ este infinit de mic, suprafețele izocromatice se apropie de axa optică.

Pentru a ne da sarmă de interpretarea acestor rezultate, să considerăm lama MM'



tăiată perpendicular pe bisectrița ascutită Az a axelor optice, și având grosimea AB . Să construim intersecția suprafeței izocromatice corespunzătoare la trei valori a lui δ , pentru planul ce trece prin această bisectriță și prin axele optice

XX' și YY' . Curbile determinate prin aceste trei suprafețe isocromatice, pe suprafața inferioară a lamelei, proiectate pe un plan orizontal, ne vor da o figură care va reprezenta aspectul curbelor isocromatice, când privim această lamă în lumină convergentă. —

Trebuie dar să examinăm ceea ce se petrece în jurul punctelor, care reprezintă intersecția axelor optice cu fața lamei atât perpendicular pe bisectrița ascuțită; și fiind că avem și cristale uniaxe și cristale biaxe, să examinăm ambele cazuri. —

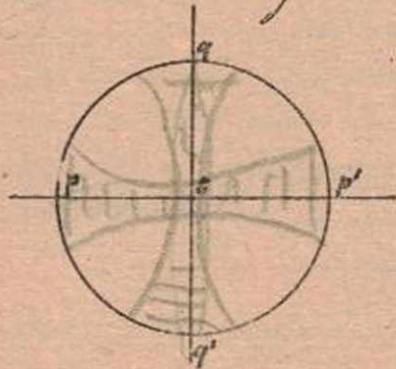
a). Cristale uniaxe. Liniele neutre. Să considerăm cazul cel mai general, când secțiunea principală a analizorului face un unghi α oarecare cu planul de polarizare a luminii incidente. În acest caz $\sin 2\alpha$ e diferit de $\pm \sin 2\beta$. Pentru a avea liniele neutre, va trebui să facem:

$$\sin 2\alpha = 0 \quad \text{sau} \quad \sin 2\beta = 0.$$

Să considerăm primul caz. Am văzut că: α este unghiul ce face planul de vibrație a luminii incidente cu una din direcțiunile dreptunghiulare, care lasă să treacă lumina prin cristal și care ajunge în α pe planul HH' (a se vede figura din urmă): Să admitem

că este aceea ce corespunde razei extraordinare. Apoi știm că, direcția vibrațiunii razei extraordinare este continuată în planul care trece prin direcția razei în cristal și prin axă.

Dacă considerăm în una din figurele precedente, că punctul S este punctul unde



se reunesc toate razele care au trecut prin cristal în direcțiunea axei optice, atunci linia Sa reprezintă direcția vibrațiunii care, esind din cristal ajung în a . Dacă

considerăm o circonferință descrisă în jurul lui S în planul ff' , două puncte p și p' diametral opuse sunt astfel în căt dreapta ps este paralelă cu planul de polarizație a luminii incidente: pentru aceste puncte avem: $\sin 2\alpha = 0$. deci aparțin unei linii neutre. Dacă considerăm punctele q și q' diametral opuse și la 90° de cele întâi, și dacă axa cristalului este normală planului ff' însă îndepărtată de pp' , atunci direcția qs este perpendiculară pe planul de polarizație a luminii incidente, și avem și pentru aceste puncte: $\sin 2\alpha = 0$. Ele aparțin deci încă unei linii

neutrie. Dacă vom considera deci o infinitate de
circonferențe concentrice, având pe s ca centru,
pentru fiecare din aceste circonferențe vor
exista puncte corespunzătoare lui p și p' , q și
 q' ... Considerate împreună ele vor forma do-
uă drepte qq' și pp' perpendiculare între ele
și trecând prin s , dacă axa cristalinului e
normală planului ff' . - Aceste două linii
formează o cruce. -

Să considerăm al doilea caz: $\sin 2\beta = 0$.
Vom avea pentru același refon o altă cruce a
cărui centru va corespunde cu urma s a
axei optice pe planul ff' . -

Dacă $\alpha = \beta$, adică, dacă secțiunea princi-
pală a analizorului este paralelă cu di-
recțiunea de vibrațiune a luminii inciden-
te, atunci cele două cruce se confundă în
una singură care este albă. -

Dacă $\alpha = \beta + \frac{\pi}{2}$ și prin urmare: $\sin 2\alpha =$
 $= -\sin 2\beta$, adică: dacă secțiunea princi-
pală a analizorului este perpendiculară pe
direcția de vibrațiune a luminii inciden-
te, vom avea încă cele două cruce confunda-
te în una singură, dar crucea va fi neagră.

Liniile isocromatice. Pentru a explica

(1) Ramurile acestor două cruce fac un unghi
de $\alpha - \beta$, dacă axa optică e perpendiculară pe ff' .

forma curbilor isocromatice în cristalele uniaxe observăm că: dacă punctul S reprezintă punctul în care axa optică a cristalului străbate planul ff' , este evident că, dacă operăm în lumină monocromatică, și dacă secțiunea principală a analizorului este perpendiculară pe planul de vibrație a luminii incidente, adică: $\alpha = \beta \pm \frac{\pi}{2}$, relațiunea (5) devine:

$$\frac{I'}{I} = \sin^2 2\alpha \sin^2 \pi \tau$$

Atunci pentru razele care au esit în S , τ este nul și deci și I' este nul: deci în punctul S va fi întunerec. Dar dacă ne îndepărtăm de S valoarea lui τ crește, și pentru valori a lui τ ce nu trec de câte va unitate, liniile isocromatice sunt curbe închise în jurul lui S și în particular pentru cristalele uniaxe, ele sunt cercuri concentrice în jurul lui S . Dacă considerăm atunci formula care ne dă valoarea lui τ , vedem că, diametrul inelelor este proporțional cu unghiul ce face raza considerată cu axa, și că aceste inele sunt cu atât mai strânse cu cât sunt mai departate de centru. Vom avea deci în jurul punctului S ,

curbe alternativ strălucitoare și obscure:
curbele obscure corespund la valori întregi
a lui τ și curbele strălucitoare pentru:

$$\tau = \frac{2k+1}{2}, \quad k \text{ fiind un număr întreg.}$$

Dacă ²operăm în lumină albă, vom avea
acelas fenomen, cu această diferență
că, în loc să avem cercuri alternativ ob-
scure și luminoase, colorate uniform, vom
avea cercuri colorate cu culorile spectru-
lui, a căror succesiune este dată de
scara cromatică a lui Newton, culorile
slăbind repede, când ne îndepărtăm de
centru. —

Dacă secțiunea principală a analizorului
este paralelă cu planul de vibrați-
une a luminii incidente, atunci avem:

$$\alpha = \beta \text{ și deci: } \frac{I'}{I} = 1 - \sin^2 2\alpha \sin^2 \pi \tau.$$

Atunci curbele obscure sunt negre și ocu-
pă locul celor luminoase și vice-versa.

În același timp se observă că: curbele ob-
scure sunt negre numai în punctele pla-
nului ff' pentru care avem:

$$\sin^2 2\alpha = 1.$$

și lumina crește când ne apropiem de li-
niile neutre. —

b). Cristale biaxe. Linii neutre. Ne raportăm la formula generală ce am întrebuințat pentru Studiul Cristalelor uniaxe. --

Pentru a avea linii neutre, trebuie să considerăm: $\sin 2\alpha = 0$. Pentru a defini valoarea lui α , vom admite ca în cazul precedent, că pentru o rază care iese în punctul S al planului ff' , una din cele două direcțiuni de vibrațiune în cristal este continuată în planul bisector a diedrului format prin planul care trece prin direcțiunea razei și prin axele optice; atunci punctom considerăm că α este unghiul format de unul din cele două planuri bisectoare cu planul de vibrațiune a luminii incidente: fie P acest plan. Dacă în planul focal ff' , punctul S descrie o circonferență în jurul lui α ca centru, atunci linia as descrie un unghi de 360° , iar planul bisector nu descrie decât un unghi de 180° . Deci, nu există decât o singură pozițiune a lui S , pe care o însemnăm cu s ; pentru care planul P este paralel cu planul de vibrațiune a luminii incidente, pentru care avem: $\alpha = 0$, și o singură pozițiune s ; pentru care planul P este

perpendicular pe planul de vibrațiune a lumii incidente, adică avem: $\alpha = \frac{\pi}{2}$. Deci, pe o circumferință descrisă în jurul lui a ca centru, nu există decât două puncte S_1 și S_2 , care aparțin liniei neutre definite prin: $\sin 2\alpha = 0$. — Deci, dacă considerăm toate circumferințele descrise în jurul lui a ca centru și reunim toate punctele neutre prin o linie, această linie va trece prin a extremitatea axei optice. — De asemenea pentru $\sin 2\beta = 0$ vom avea o altă linie neutră trecând prin a .

Cele două linii neutre formează un unghi $\alpha - \beta$, când axa optică e perpendiculară pe planul ff' , sau în general acest unghi se anulează înfăcșurându-se cu $(\alpha - \beta)$.

Când secțiunea principală a analizorului este paralelă cu planul de vibrațiune a lumii incidente, avem: $\alpha = \beta$; atunci cele două linii neutre se confundă în una singură, care este albă.

Dacă secțiunea principală a analizorului este perpendiculară pe planul de vibrațiune a lumii incidente, avem:

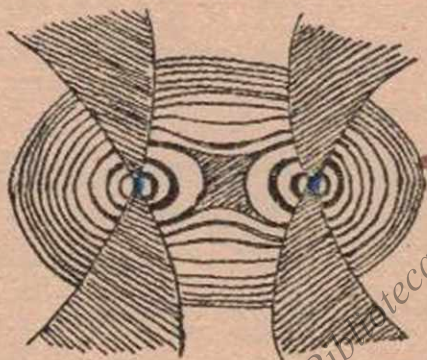
$$\alpha = \beta + \frac{\pi}{2} \text{ și deci: } 2\alpha = - \sin 2\beta.$$

Atunci cele două linii neutre se confundă

în una singură, care este neagră. —

Pentru cazul când nu e decât o singură linie neutră, liniile isocromatice nu schimbă de culoare, când ele traversează linia neutră; ele trec la culoarea complementară când sunt două linii neutre deosebite.

Linii isocromatice. În cristalele bi-



axe, considerăm ca-
tremitățile α și α' , a
axelor optice și dacă
operăm în lumină
monocromatică și

$\alpha = \beta + \frac{\pi}{2}$, avem ca și
la cristalele uniaxe

$$\frac{I'}{I} = \sin^2 2\alpha \sin^2 \pi t.$$

În α și α' , avem negru; atunci dacă valori-
le lui t nu trec de câteva unități, curbile
isocromatice în jurul lui α și α' , sunt cur-
be închise; dar pentru valori mai mari
de α lui t , curbile isocromatice sunt curbe
închise în jurul celor două axe α și α' , al-
ternativ obscure și luminoase. Dacă:
 $\alpha = \beta$, curbile obscure ien loc curbelor lumi-
noase și viceversa, și atunci:

$$\frac{I'}{I} = 1 - \sin^2 2\alpha \sin^2 \pi t.$$

Si vom avea ca si la cristalele uniaxe: curbele obscure nu vor fi negre de cat in punctele pentru care avem: $\sin^2 2\alpha = 1$. Lumina este cu atat mai tare pe liniile obscure cu cat $\sin^2 2\alpha$ este mai aproape de zero, adica cu cat ne apropiem de liniile neutre. -

Daca sectiunea principala a analizorului face un unghi cu oare care cu planul de vibratiune a luminii incidente, liniile isocromatice pastreaza aceiași pozitiune. -

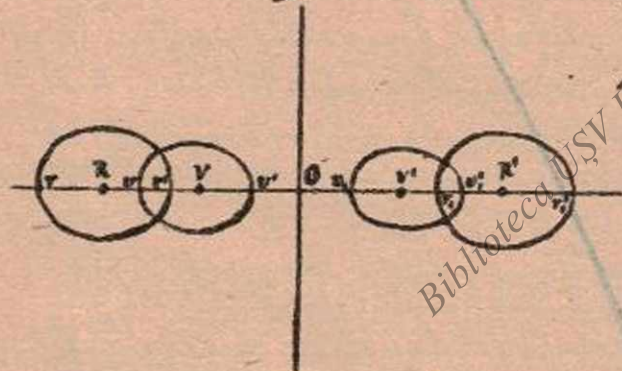
Luand in considerare valoarea lui τ , vedem ca, curbele isocromatice vor fi cu atat mai indepartate cu cat lungimea de unda a luminii in care operam este mai mare. Daca operam in lumina alba, vom avea in jurul extremitatilor α si α , curbe colorate, care nu mai sunt isocromatice si care dau cele mai de multe ori nastere fenomenului numit: dispersiunea axelor. -

Acest fenomen este datorit la doua cauze: 1^o ca unghiurile axelor corespundetoare diverselor radiatiuni, nu sunt egale; si 2^o fiind ca planul axelor pentru aceste radiatiuni nu sunt aceleasi. - Pentru a explica acest din urma caz, sa luam un exemplu.

Știm că: prizma ortorombică are trei axe de simetrie binară și că, cele trei axe ale elipsei elipsoidului trebuie să coincidă cu cele trei axe de simetrie pentru oă care radiațiune. Însă fiind că planul axelor optice trece totdeauna prin axele de elasticitate mare și mică, este evident că, acest plan va fi totdeauna un plan de simetrie; și fiind că sunt trei de aceste planuri, care corespund cu: baze, brahi și macropinacoid, se poate ca, pentru o radiațiune planul axelor optice să coincidă cu unul din pinacoizi, și pentru o altă radiațiune să coincidă cu alt pinacoid. Deci: pentru a examina acest fenomen în cristaliu aparținând sistemului ortorombic, vom lua secțiuni paralele cu cei trei pinacoizi și se poate că: planul axelor să fie același pentru toate radiațiunile, sau ca, pentru oarecare radiațiune ună axele optice să fie într'un plan, și pentru cele l - alte în planul perpendicular asupra celui ce conține axele celor întâi radiațiuni. —

Să studiem diversele cazuri ce se pot prezenta:

Dispersiunea axelor. Considerăm mai întâi cazul cel mai simplu, acela în care axele optice a diverselor vibrațiuni sunt conținute în același plan. Fiind că unghiul axelor optice variază pentru diversele vibrațiuni, se întâmplă că în unele cazuri unghiul axelor roșu e mai mare decât al axelor violete, ceea ce se exprimă scriind: $\varphi > \psi$ sau contrariu: $\varphi < \psi$. - În pri-

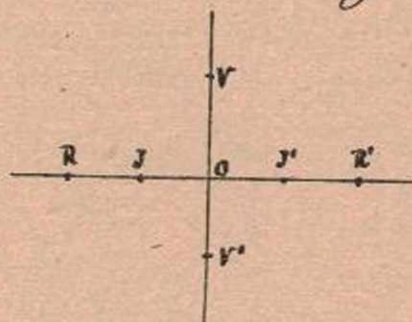


mul caz axele ocupă pozițiunile R și R' , mai îndepărtate de centrul O , iar V și V' ocupă poziții mai apropiate. Atunci inelele obscure ale ro-

sului și violetului ocupă pozițiunile rr' , r, r' și vv' , v, v' . Fiind că operăm în lumină albă, dispariția roșului va da albastru, iar dispariția violetului va da ros. Deci în v' va fi ros, iar în r' albastru, așa că inelele colorate în jurul axelor optice vor fi albastre în interior și roșu la exterior. Acest fenomen se numește: dispersiunea axelor. - - -

Dacă planul axelor variază, avem figuri com-

plexe. În adevăr: să presupunem că pentru o Substanță axele rosului sunt mai îndepărtate de cât ale galbenului, însă continute în planul axelor optice. Fînd

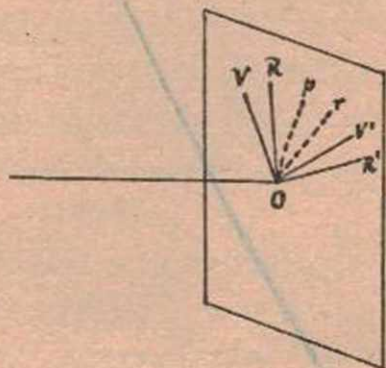


că unghiul axelor scade cu cât ne apropiem de O, vine un moment cînd el este Zero, și atunci el devine perpendicular pe planul axelor optice precedente: căpiătăm astfel

în punctele V și V'. Aceste fenomene se observă numai la cristali din Sistemul Ortorombic. —

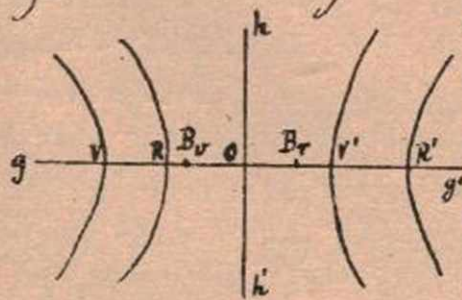
Dispersiunea bisectritelor. Acest fenomen se observă la cristali din Sistemul monoclinic. — Aici nu avem de cât o singură axă binară: ortodiagonala care e normală la planul clinopinacoidului. În acest caz o singură axă a elipsoidului coincide cu această axă binară, și atunci celelalte două axe rămânînd perpendiculare pe cea dintîi, trebuie să se găsească în planul Clinopinacoidului, unde ocupa diverse pozițiuni.

1) Cazul cel mai simplu este acela, când: axa binară coincide pentru toate radia-
țiunile cu axa de elasticitate medie. În acest



caz axele optice relative la
toate radiațiunile sunt
continute în planul cli-
nopinacoidului și au po-
zițiuni speciale, așa că
bisectrițele lor sunt di-
ferite. Fie Or și Or' bisec-
tritele corespunzătoare
radiațiunilor roșii și

violote. Avem astfel în fenomenul dispersi-
nei bisectrițelor. Este evident că în acest
caz, pentru a observa bine fenomenele, va tre-
bui să tăiem o secțiune perpendiculară pe
bisectrița ascuțită medie. În tot cazul ea
este normală clinopinacoidului și se găsește
în zona bari și a ortopinacoidului, putând
fi: bari, ortopinacoidul sau o fată de orto-

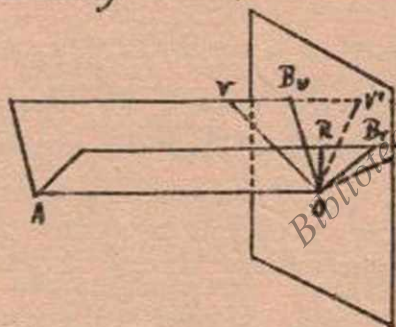


doma. În acest caz urme-
le bisectrițelor pentru roș
și violet fiind Br și Br' ,
axele pentru acele culori
vor fi V și V' și R și R' și
prin urmare: $V'R'$ va fi
mai larg decât VR .

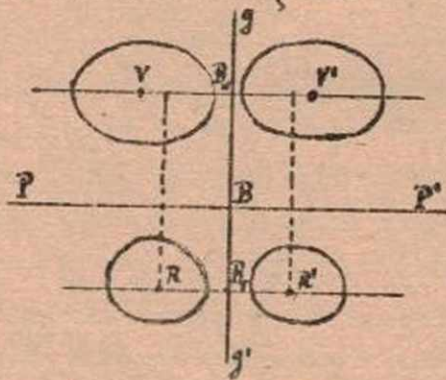
Acest fenomen de dispersiune si a axelor si a bisectritelor a primit de la Des Cloizeaux numele de dispersiune inclinata.

2) Cazul cel mai general este acel in care: axa binară coincide cu una din direcțiunile le maximum sau minimum de elasticitate. Putem împărți acest caz general in doua cazuri secundare:

a) Axa binară este bisectrita obtusă sau normală optică pentru toate radiațiunile. Este

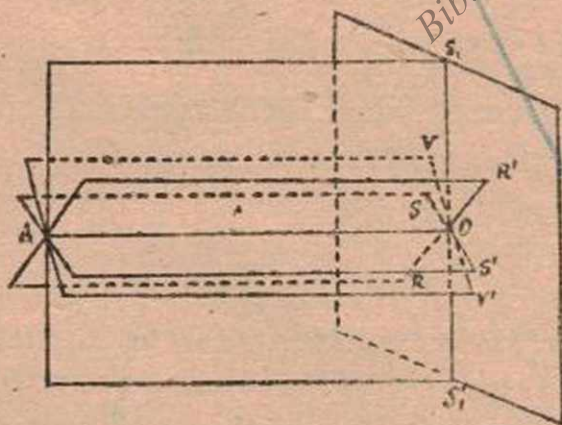


evident că in acest caz bisectritele ascuțite sunt in planul clinopinacoidului si ocupa pozițiuni diferite pentru razele roșu si violet Bv si Br . Atunci planul axelor roșu este $BrOA$ si a axelor violet $BvOA$ si se taie după axa binară OA . In acest caz OR si OR' precum si OV si OV' sunt dispuse simetric în raport cu planul Clinopinacoidului. Vom alege dar o secțiune normală la bisectrita medie între Br si Bv , secțiune care va fi cuprinsă în zona bazei cu ortopinacoidul. Dacă deci avem în B urma



bisectrită mediu și PP' urma planului corespun-
Zelor, atunci VV' va reprezenta urma planului
axelor violete și RR' a axelor roșii trecând
prin Bv și Br , paralel cu PP' ; și fiind că dis-
persiunea axelor persistă, vom avea: $VV' > RR'$.
În acest caz există simetrie în raport cu gg'
însă nu în raport cu pp' . Astfel vom avea
la exteriorul hiperbolelor, roșu sus și albaș-
tru jos, pe când la interior roșul va fi jos,
și albastrul sus. Fiind că dispersiunea e
în raport cu axa orizontală, fenomenul
se numește dispersiune orizontală. —

8) Axa binară este bisectrită ascuțită pon-
tru toate radiațiile. În acest caz norma-



la optică este în ple-
nul Clinopinacoïdu-
lui și ocupă o pozi-
ție oarecare, și atunci
bisectritele oblice
sunt împrăștiate.
Atunci planurile
axelor optice fiind per-
pendiculare pe ple-
nul Clinopinacoïdu-
lui se tăie după bise-

ctrită care este axa binară, și pentru a avea o
secțiune perpendiculară pe bisectrită medie,
va trebui să o facem paralelă cu planul

clinopinacoidului. - Dacă considerăm planul clinopinacoidului ca plan al secțiunii, atunci planurile RR' și VV' , care conțin axele optice trec prin AO și urmele lor pe secțiune sunt dispuse radial în jurul lui O , și fiind că tot există dispersiunea axelor, RR' este diferit de VV' . Atunci totul e simetric în jurul lui O și în raport cu O . - Insa dacă admitem planurile SS' și S, S' , care reprezintă secțiunile principale ale polarizorului și a analizorului, atunci figura nu mai este simetrică, nici relativ la aceste linii nici la ori ce altă linie trecând prin O . Acest fel de dispersiune a fost numit: dispersiune încrucișată. - - -

Partea II^a.

Aparate și mijloace de observație a fenomenelor de polarizație.

Capitol IX

Microscopi polarizator.

Unul din principalele instrumente întrebuințate pentru Studiul fenomenelor optice, mai ales la cristalele ce intra în compoziția rocilor, este fara îndoială: Microscopul polarizator. Acest instrument necesită o descripție mai detaliată, mai ales în com-

poziția sa, precum și întrebuințarea diverselor părți accesorii, care servesc pentru studiarea numeroaselor proprietăți ale cristalelor, proprietăți pe care le-am studiat în cele precedente, din punct de vedere teoretic.

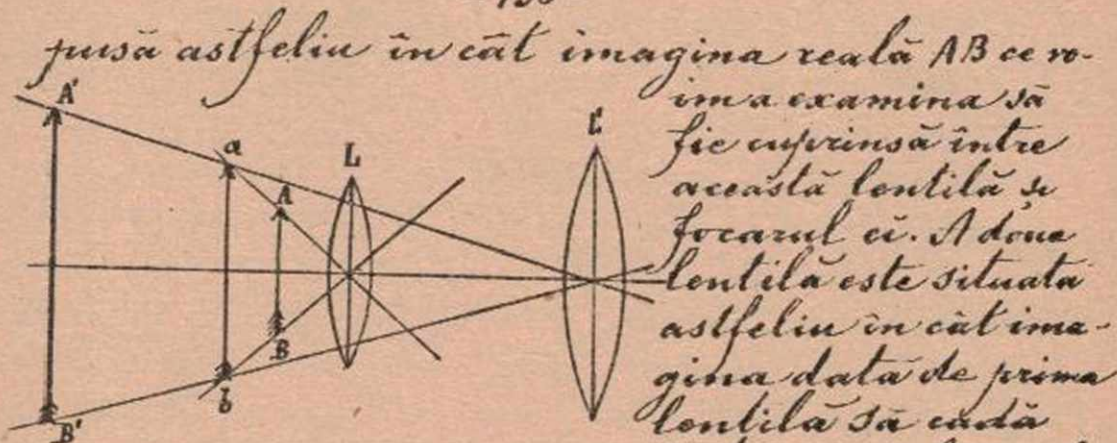
Microscopul polarizator este un microscop propriu zis, la care se adaptează un polarizor precum și un analizor, și apoi diverse dispozitive pentru examinarea proprietăților optice în lumina polarizată paralelă sau convergentă, și pentru a determina diversele constante optice a mineralelor.

Pentru a ști cum să ne servim de un asemenea instrument, este nevoie de a aduce aminte mai întâi principiul construcției sale.

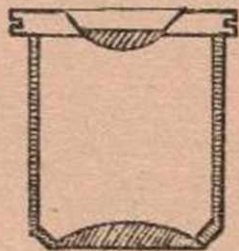
— Un microscop se compune din un obiectiv și un ocular; obiectivul dă o imagine reală și mărită a obiectului, pe când oculara servește a observa această imagine, și lărgindul îi dă o imagine virtuală și mărită.

Se construiesc mai multe tipuri de oculare. Principalele sunt:

Oculara pozitivă a lui Ramsden. Se compune din două lentile L și L' ; cea dintâi numită frontală, are focarul în f , și este



pusă astfel în cât imaginea reală AB ce vom examina să fie cuprinsă între această lentilă și focarul ei. A doua lentilă este situată astfel în cât imaginea dată de prima lentilă să cadă între ea și focarul ei. Așa dar prima lentilă dă imaginea ab a lui AB ; această imagine ab căzând între lentila L' și focarul său, dă imaginea $A'B'$. --

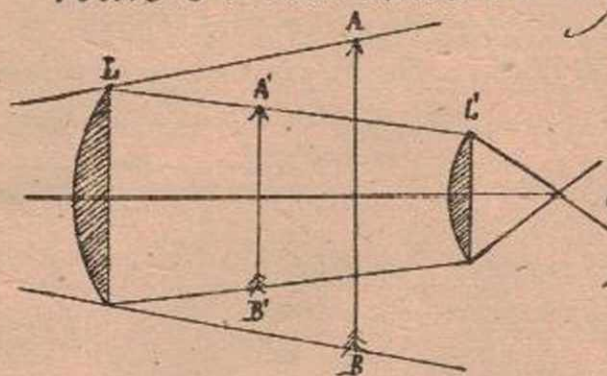


În practică se iau distanțele focale f și f' egale, atunci distanța între cele două lentile este: $\frac{2}{3}f$ și puterea de mărire este dată de formula: $M = \frac{1}{\frac{1}{3}} + \frac{4}{\frac{2}{3}f}$, în care f este distanța minimă a vederii clare. Pentru a

se reduce cât mai mult aberațiunile cromatice și de sfericitate, se pun cele două lentile cu convexitatea în față. --

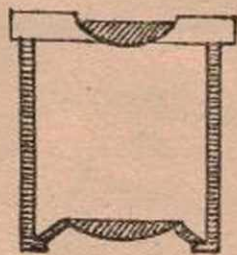
Oculara negativă a lui Huygens. Se compune din două lentile L și L' , însă care sunt dispuse astfel în cât imaginea AB pe care

vom să observăm să se formeze între lentile.



Însă această imagi-
nă întâlnind len-
tila L' , va da o ima-
gină în $A''B''$ pe care
o vom vedea mărită
prin L în $A'B$. Len-
tilele ce se întrebuiin-
tază sunt plan con-
vexe și înturnate

cu convexitatea către lumină pentru a mic-
sura aberațiunea. - Puterea de mărire va fi
dată prin formula: $M = \frac{1}{3} + \frac{25}{f}$.



Lentila L se cheamă lentila
de câmp și servește a mări
câmpul vizual din care ca-
uză acest ocular are un
câmp mai mare de cântec
profund. În microscop se
întrebuintază tot de a une
oculare negative.

Obiectivele trebuie să fie: aplanetice adică
să dea o imagine perfectă și acromatică,
adică să fie corijate de aberațiunea de refran-
gibilitate; pentru a ajunge la acest rezultat
obiectivele sunt compuse din mai multe
lentile. De ordinul se ia o lentilă convergentă

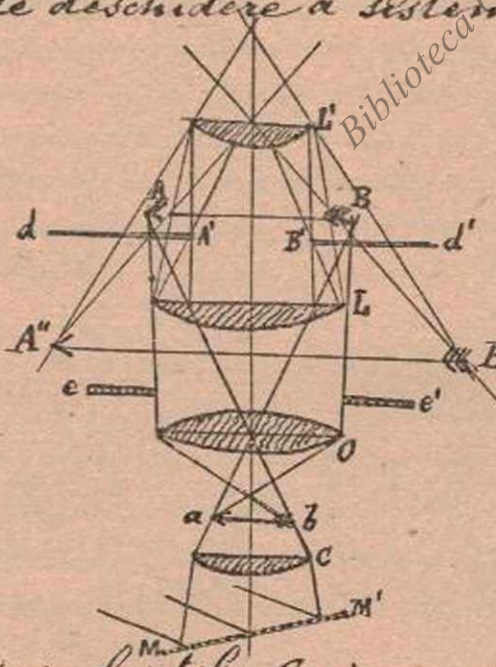
de crown, care se asociază cu una de flint, așa că deviația totală pentru anumite culori este acceas, așa dar ele vor avea un focar comun. —



Fiecare obiectiv este caracterizat prin distanța sa focală F și deschiderea numerică V , a cărei valoare e dată prin formulele:

$$V = \sin u \quad \text{și} \quad V = n \sin u$$

în care n reprezintă indicele lichidului de imersiune, iar u jumătate din unghiul de deschidere a sistemului. —



Să considerăm acum un microscop având un obiectiv și un ocular negativ, și să vedem care este mersul razelor trimise de oglindă în direcțiunea axei. —

Oglinda MM' trimite în axa aparatului lumina difuză, care străbate mai întâi un condensator reprezentat

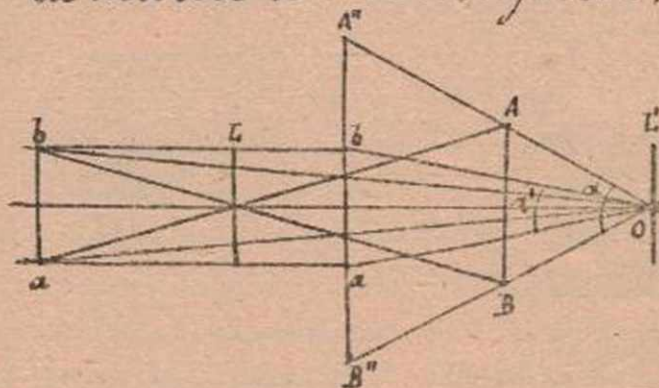
prin lentila C și care concentrează lumina

asupra obiectului a b. În fața obiectului astfel
luminat se găsește obiectivul reprezentat prin
o singură lentilă l, și care dă imaginea mă-
rită AB și reală a acestui obiect. - Însă a-
ceastă imagine se face între cele două len-
tile h și h' a oculare și trebuie să treacă
prin lentila de câmp l', care dă imaginea
A'B'. Această imagine se găsește în fața
lentilei h' care va da o imagine virtuală
mărită A''B'', la distanța minimum a vede-
rei clare. - De ordină se limitează câmpul
vederii prin o diafragmă circulară cc' pusă
îndărăptul lentilei obiectivului, și pentru
a avea un câmp net și clar, se pune o altă di-
afragmă dd' în planul A'B' unde se forma-
ză imaginea după ce a trecut lentila de
câmp. -

Se știe că microscopul e format din un
tub cilindric ce are de ordină o lungime
de 160^{mm} iar la extremitățile lui se găsesc
fixate: sus oculara și jos obiectivul. Tubul
e fixat pe un suport și poate primi miș-
cări mai mult sau mai puțin lente cu
ajutorul unei cremailiere și a unui sa-
rub fără sfârșit, pentru mișcările mici
ce servesc la punerea la punct ne servim

de un surub micrometric.

De multe ori se cere a determina puterea de mărire a microscopului, adică raportul între mărimea imaginii și a obiectului.

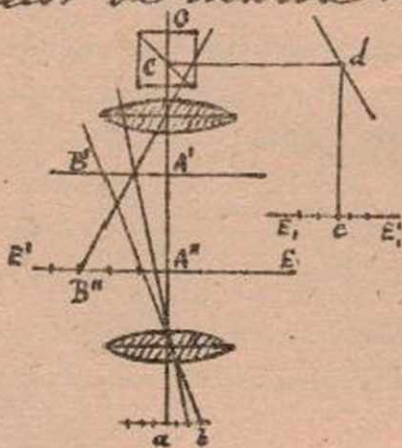


În teorie se definește astfel puterea de mărire a microscopului: raportul unghiurilor

α și α' sub care se vede la distanța minimum a vederii clare imaginea $A''B''$ și obiectul ab . $G = \frac{\alpha'}{\alpha} = \frac{A''B''}{ab} = \frac{A''B''}{AB} \cdot \frac{AB}{ab}$

Însă: $\frac{A''B''}{AB}$ reprezintă puterea de mărire a ocularului L' , iar $\frac{AB}{ab}$ aceea a obiectivului L . Deci:

puterea de mărire totală este produsul puterilor de mărire a obiectivului și a ocularului.



Pentru a măsura această putere de mărire trebuie să avem la dispoziție o cameră clară și un micrometru obiectiv. Se pune acest micrometru pe platina microscopului în ab și se pune

la punct, ceea ce dă imaginea $A''B''$. Pe de altă parte prin camera clară se suprapune acestei imagini mărite $A''B''$ imaginea EE' a unei alte scări graduate E, E' , care se găsește pusă pe o masă la o distanță așa ca: $Oc + cd + de = OA''$. Pentru a ajunge la acest rezultat, masa pe care se găsește E, E' , se poate sui sau scori după voință. -

Pentru a calcula această putere de mărire, se observă numărul n de diviziuni a micrometrului ($\frac{1}{100}$), care corespunde cu m diviziuni a scării (în milimetri). Avem atunci:

$$G = \frac{m}{n} \cdot 100.$$

Cu ajutorul microscopului ordinar, putem face încă anumite determinări precum: măsurări de lungimi, de unghiuri plane etc.

Pentru a măsura lungimile, ne putem servi:

- 1° De șurubul micrometric al platinei mobile; pentru aceasta facem să coincidă extremitățile lungimii de măsurat, succesiv cu punctul de încrucișare a firelor reticulului și evaluăm pe linia milimetrică și vernierul circular de pe capul șurubului de mișcare, dimensiunile aceluși obiect. - -

2^o De un micrometru ocular, care poate fi: un ocular micrometric cu scară graduată, sau un micrometru cu fir mobil. În ambele cazuri determinăm numărul n de diviziuni interceptate pe scară micrometrică. Aceste reprezintă dimensiunile imaginii, dar nu a obiectului: pentru a avea dimensiunea obiectului, înmulțim pe n cu o constantă K , pe care o determinăm în raport cu sistemul optic întrebuințat, adică pentru anumite obiective și oculare. —

Măsura unghiurilor plane. Aceasta operație se face mai ales când vom a determina valoarea unghiurilor ce fac două fete în o secțiune a unui cristal, paralelă cu planul normal diedrului ce vom a măsura. Pentru aceasta ne servim de platina mobilă a microscopului, care trebuie să fie perfect contrată. Așezăm cristalul astfel încât vârful unghiurii ce vom a măsura, să coincidă cu încrucișarea firelor reticulului, iar una din laturi cu unul din fire, și învârtim platina până ce a doua latură a unghiurii coincide cu al doilea fir al reticulului (unghiuri mai mici de 90°) sau cu prelungirea celui întâi (unghiuri

mai mari de 90°). Unghiul de care s'a învârtit platina este complimentul sau suplimentul unghiului de măsurat. — —

Sunt unele microscopae care au un ocular goniometric cu reticul mobil, cu ajutorul căruia putem măsura direct unghiul cristalului.

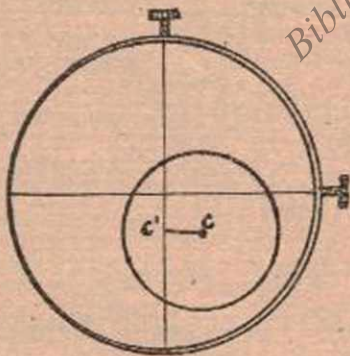
— Să vedem acumă cum e compus un microscop polarizator. Am fis că microscopul polarizator este un microscop ordinar, căruia se adaptează doi nicoli: unul numit polarizor așezat sub obiectiv și sub preparatie, iar al doilea numit analizor, între obiectiv și ocular, sau deasupra ocularului. — Pentru ca să se poată măsura unghiurile cristalilor sau unghiurile de extincțiune, platina acestor aparate este turnată și graduată pe margine. În ce privește partea optică, ea poate fi dispusă așa ca în cazurile cele mai generale, rarele luminoase ce ies din polarizor să străbata preparatia sub formă de fascicul paralel: se zice că în acest caz observațiile se fac în lumină paralelă, iar aparatul se numește Ortoscop. Când însă voim a face observațiile în lumină convergentă, atunci, sau ne servim de un ortoscop, că-

ruia putem introduce o lentilă convergentă între polarizor și preparatia microscopică, sau ne servim de un microscop special, numit Conoscopy. —

— Pentru studiul preparatelor microscopice de roți în lumina polarizată, ne servim în genere de microscopie polarizatoare, care trebuie să intrunească reunite, toate dispozițiile de care se cere să facem uz, fie în lumină paralelă, fie în lumină convergentă.

Pe lângă aceasta microscopul trebuie să fie centrat, adică să permită de a așeza un punct al obiectului ce vom studia, așa ca să coincidă cu încreșcătura firelor reticulului, ori care ar fi pozițiunea obiectului, când învârtim platina pe care e așezat. Fiind că nu se pot construi microscopie în care să existe coincidență perfectă a axei de rotație a platinei, cu axa optică a microscopului, de aceea se utilizează diverse dispozitive pentru a se obține această coincidență, iar operațiunea se numește centrare. În unele microscopie, precum cele ale lui Nachet sau cele fabricate de Société Gérovoise, nu-

numite cu centrare permanentă, obiectivul este legat cu platină, așa că se mișcă odată cu ea, pe când tubul care poartă oculara și analizorul, se mișcă independent de obiectiv. În toate celelalte microscopie, numite cu Centrare facultativă, potom face uz de două suruburi, care sunt adaptate sau la platină sau la suportul obiectivului, și care se mișcă în direcții perpendiculare, paralel cu firele reticulului. În acest caz, dacă constatăm că microscopul e descontrat, trebuie să determinăm mai întâi, care e poziția noului centru de rotație, și care e reprezentat prin un punct al preparatului, care, în cursul unei învârtituri complete a platinei, nu schimbă poziția: fie ϵ acel centru. Pentru a-l face să coincidă cu încreșterea



firelor reticulului, e de ajuns de a mișca surubul din dreapta, până ce punctul ϵ

atinge firul vertical în C' ; atunci mișcând surubul de sus, aducem punctul C' în coincidență cu încreșterea firelor reticulului: atunci microscopul e centrat.

De ordină micolul polarizor e fix și în legătură cu condensatorul, care cu ajutorul unui surub se poate sui sau scobi adică, apropia sau îndepărta de preparativ, pe când micolul analizor este fixat în tubul microscopic între obiectiv și ocular, însă așezat într-un suport mobil, care permite să-l scoatem sau să-l introducem în mersul razelor ce au trecut prin obiectiv, și înainte de a intra în ocular. — Secțiunile principale ale micolilor sunt dispuse perpendicular una pe alta (micoli în cruce) și coincid cu direcțiunile celor două fire ale reticulului.

— Să vedem acum cum vom putea observa diversele fenomene, fie în lumină paralelă, fie în lumină convergentă.

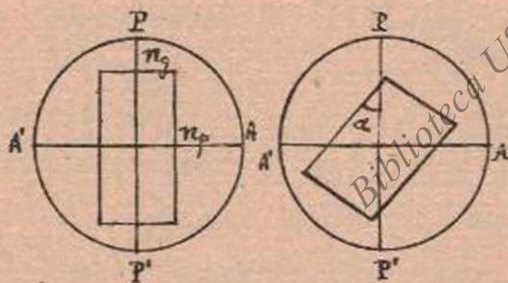
Ne vom ocupa mai întâi de fenomenele cunoscute sub numele de extincțiune, pe care le observăm în lumină paralelă.

Știm că în general o substanță birefringentă

introdusă între nicoli în cruce, restabilește lumina; există însă 4 pozițiuni pentru care restabilirea luminii nu are loc, și aceasta pentru cazurile când axele n_g și n_p sunt paralele cu secțiunile principale ale nicolilor: aceste pozițiuni se numesc: pozițiuni de extincțiune. Dacă nicoli sunt paraleli, adică avem lumina în câmpul microscopului, introducerea unei lamele birefringente produce o scădere a intensității luminoase: când axele n_g și n_p sunt paralele cu secțiunile principale, lumina transmisă e maximum. Dacă secțiunea examinată este paralelă cu planul unei secțiuni ciclice, atunci între nicoli în cruce avem totdeauna întuneric, iar între nicoli paraleli avem continuu lumina, orî care ar fi pozițiunea lamelei prin învîrtirea ei între nicoli. —

Când avem o preparație microscopică în care avem o secțiune într'un mineral ce vom a studia, de ex: un feldspat, atunci se poate întâmpla ca această secțiune să ne prezinte un contur determinat sau numai așa numite linii directrice, precum: o mușche a două fete

urma de clivaj, direcțiunea de lungire a cristalului etc. În aceste cazuri, direcțiunile de extincțiune ocupă pozițiuni anumite în raport cu liniile ce formează conturul cristalului sau cu liniile directrice, și aceste pozițiuni depind de la sistemul cristalin precum și de la direcțiunea în care a fost tăcută lamela. Când liniile n_g și n_p sunt paralele sau așezate simetric în raport cu conturul lamei sau cu liniile directrice, atunci extincțiunea



se face dreaptă; când ele ocupă o pozițiune oarecare, atunci extincțiunea se face oblică. — Când avem dar o lamelă ce prezintă o extincțiune oblică, pentru a afla

pozițiunea liniilor n_g și n_p trebuie să determinăm unghiul ce face una din aceste linii de extincțiune cu linia directrice aleasă. acestui unghi se dă numele de: unghi de extincțiune. Cu ajutorul microscopului polarizator, măsura acestui unghi se face știind că direcțiunile firelor reticulului

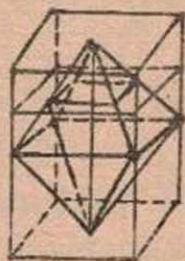
corespund cu secțiunile principale ale nicotilor. Pentru aceasta facem să coincidă linia directrice aleasă, cu unul din firele reticulului, de ordinar cu acel vertical, și întorcem platina microscopului și prin urmare și lamela ce examinăm, până la extincțiune completă: unghiul de care s'a învârtit platina este unghiul de extincțiune.

Sa diversele sisteme cristaline, extincțiunile se fac astfel:

Sa sistemul cubic, oricare ar fi direcțiunea în care a fost tăcută lamela, ea rămâne totdeauna stânsă. —

Sa sistemul patrat avem un elipsoid de revoluțiune în jurul axei principale, care e și axa optică. Putem considera că:

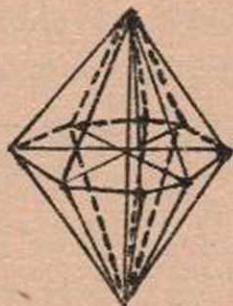
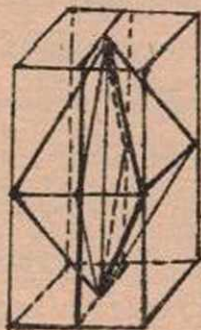
1^o Secțiunea e paralelă cu baza; în acest caz



ea fiind perpendiculară pe axa optică, coincide cu o secțiune ciclică a elipsoidului și deci va fi totdeauna stânsă între nicotii în cruce. Dacă secțiunea prezintă

un contur regulat, aceasta nu poate fi decât un pătrat sau un octogon.

2^o Sectiunea e paralelă cu axa principală.



Ori care va fi orienta-
rea acestei sectiuni
în jurul axei, ea e
perpendiculară pe o
sectiune principală
și va prezenta deci
4 catinoturi drepte
în raport cu axa.

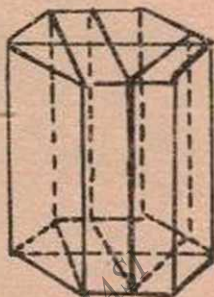
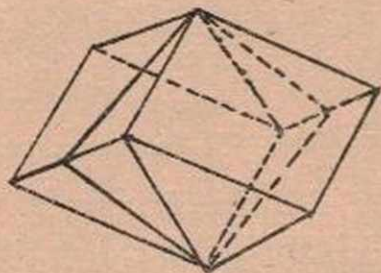
Forma sectiunilor
poate să fie: sau
dreptunghiulară (în solid prismatic) sau rom-
bică (în solid piramidal). — —

3^o Sectiunea are o directiune oare care. Dacă
raportăm aceste sectiuni la proiectia axei
principale, atunci și extințiunile raporta-
te la aceea proiectie vor fi drepte, dacă le ra-
portăm la contururi, atunci se pot întâm-
pla mai multe cazuri: 1^o Dacă sectiunea
este înclinată pe axa coaterenară, însă nor-
mala la unul din planurile de simetrie
binară, atunci atât contururile cât și ex-
tințiunile vor fi simetrice în raport cu ur-
mile acestor planuri. Dar, dacă sectiunea
e oblică în raport cu acele planuri, atunci

contururile nu mai sunt simetrice în raport cu liniile de extincțiune. —

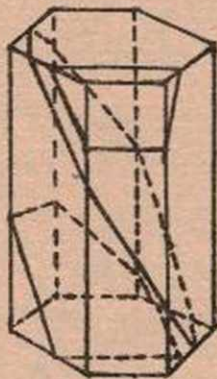
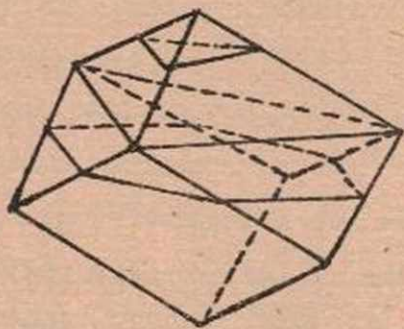
La sistemul hexagonal și romboedric, secțiunile paralele cu axa vor fi dreptunghiuri sau

romburi și se vor tăia paralel cu urma axei ca și la sistemul patratic. Secțiunile pa-



ralele cu baza, vor fi: sau triunghiuri, sau hexagoane sau dodecagone și vor fi totdeauna stânse. În fine când secțiunile sunt oblice

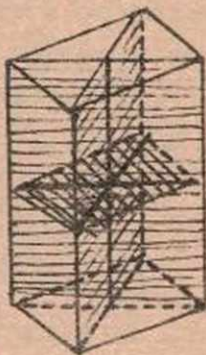
făcând cu axa, putoam avea, secțiuni hexagonale lungite sau dreptunghiuri. Secțiunile după zona re p sunt:



sau dreptunghiuri sau hexagoane simetrice față cu două axe dreptunghiulare, extincția

făcându-se după axă. -

La Sistemul ortorombic avem trei planuri de simetrie care sunt paralele cu cei trei pinacoidi: bari-



brahi și macropinacoid (p, h, g). Aceste trei planuri trebuie să cuprindă axe-

le optice, iar axele cristalografice coincid cu axele de elasticitate a elipsoidului. -

Secțiunile paralele cu cei trei pinacoidi sunt perpendiculare pe una din cele trei axe principale și pe două din planurile de simetrie a elipsoidului, din care cauză au extincțiunea dreaptă. Unul din pinacoidi e perpendicular pe bisectrița ascuțită a axelor optice, un altul pe bisectrița obtușă, iar al treilea pe axa medie u ni-

Secțiunile paralele cu zonele principale ph, pg, hg în care axa de zonă e perpendiculară pe un plan principal al elipsoidului, au extincțiunile în raport cu

această axă, totdeauna drepte. Contoururile diferitelor fete a Zonei vor fi dispuse simetric numai în raport cu una din liniile de extincțiune. Una din cele trei zone principale conține secțiunile normale la axele optice, care vor fi, după cum se știe, stânse. În ce privește secțiunile oarecari, ele nu vor avea extincțiuni simetrice în raport cu conturul. —

La sistemul monoclinic nu există decât un singur plan de simetrie, care trece prin axa principală și Clinodiagonală și e perpendicular pe ortodiagonală; acest plan conține și axele optice, însă axele de elasticitate nu mai coincid cu cele cristalografice. — Dacă axele optice sunt cuprinse în planul ce trece prin Clinodiagonală, este evident că secțiunile din Zona ph' , apar continuu stânse și sunt simetrice în raport cu două axe; dacă axele optice sunt în planul ce trece prin ortodiagonală, atunci secțiunile stânse nu mai sunt simetrice. Secțiunile paralele cu Zona ph' sunt simetrice atât în raport cu urma planului q' cât și a lui

h^o si se stang dupa aceste directiuni. —

Cele - l - alte sectiuni simetrice nu se stang
dupa axa lor de figura si unghiurile de
extinctiune trebuie studiate pentru fiecare
caz particular. — —

La sistemul triclinic nu mai gasim
nici o relatie fixa intre pozitunile ane-
lor cristalografice de o parte si acele de
elasticitate optica de alta parte. De ace-
ia se studiaza diversele cazuri in parti-
cular. — — —

